MATEMÁTICAS

GUÍA DIDÁCTICA

4A ESO

1 Escucha el número π

Presentación

Esta situación está formulada para trabajar los contenidos de números irracionales, errores y aproximaciones, además de para reflexionar sobre la aportación de las matemáticas al progreso de la humanidad.

- Iniciar la sesión leyendo el título que presenta la situación de aprendizaje y la introducción. A continuación, proyectar el **vídeo** π, *un número para casi todo.*
- Comentar el **ODS 5.** *Igualdad de género.* Podemos tomar como base la leyenda que aparece bajo el icono, haciendo ver a los estudiantes que la ciencia avanza independientemente del género de la persona que realice la investigación, y establecer de esta manera un debate entre todo el grupo clase.
- Activar los **conocimientos previos** del alumnado mediante el cuestionario que ofrecemos en formato digital.
- Aplicar la **rutina de pensamiento** *Pienso – Me interesa – Investigo* con el objetivo de ir introduciendo al alumnado en el trabajo final que tendrá que realizar: crear una composición musical a partir de los dígitos del número π. Habría que hacer hincapié en las tres partes de la rutina, en especial en la última, relativa a la investigación, para ir introduciendo al estudiante en la necesidad de buscar solución al problema de tocar la partitura que obtengamos, sea mediante la ejecución de un instrumento o la utilización de aplicaciones.
- En el apartado **Aprenderás a…,** el alumnado podrá consultar los conocimientos que desarrollará a lo largo de la situación.

Desarrollo

¿QUÉ ES π?

- Leer en voz alta la introducción para conseguir que el alumnado entienda que π es el valor de una razón.
- La actividad 1 está pensada como una actividad de investigación para que el alumnado la realice en casa.
- La actividad 2 es otra actividad de investigación, pero para realizarla en el aula usando palillos. Es recomendable hacer grupos de cuatro donde cada uno asumirá un papel en la investigación (tomar nota de los resultados, lanzar un objeto, tomar medidas, etc.).
- Atención a la diversidad (Practicar +): ofrecemos una ficha de refuerzo de errores en las aproximaciones de números reales (p. 50).

¡π FUE NATURAL!

- Comenzar el apartado leyendo la introducción haciendo ver al alumnado la importancia de que en un libro como la Biblia ya haya una aproximación del valor de π.
- Es importante aplicar en este apartado la **destreza** *Fuentes de información fiables* y que el alumnado sepa distinguir y contrastar distintas fuentes de información.
- La actividad 3 está diseñada para trabajar en parejas, preferentemente heterogéneas, con el fin de aplicar la técnica de **aprendizaje cooperativo** *Tutoría entre iguales.* El último apartado resulta muy relevante ya que permitirá establecer debates en el aula, y se debe aprovechar para tal fin, pues estos permiten al alumnado desplegar las **competencias específicas** 3 y 8 de la materia.
- Para la actividad 4 sería necesario disponer de una sesión, ya que mediante el trabajo colaborativo los estudiantes investigarán sobre **Emma Haruka Iwao.** Quizás más relevante que la investigación en sí es la forma en la que el grupo presentará la información, que puede ser a través de medios audiovisuales (*post,* vídeo, etc.).

¡MESOπTAMIA!

- La actividad 6 se plantea como una actividad grupal; se recomienda que los grupos sean de cuatro y estén capitaneados por un miembro, que hará las veces de portavoz. Se puede trabajar la **destreza** *Pensamiento computacional* ya que para resolver el problema principal deben, previamente, resolver una serie de subproblemas (el trazado de un cuadrado inscrito y circunscrito en un círculo). Se recomienda el uso de las TIC para la resolución de esta actividad. Resulta aconsejable una puesta en común de los resultados.

¡π FUE RACIONAL!

- La actividad 7 surge como complemento de la anterior, pero ahora se pide que el estudiante la haga de forma individual. Como siempre, además del proceso de investigación en sí, es importante insistir en la forma de comunicar los resultados, si es posible, utilizando herramientas digitales.

CALCULA π COMO LO HIZO ARQUÍMEDES

- La actividad 9 está pensada como una actividad para la **evaluación continua.**
- La actividad 10 está pensada como una actividad para la **evaluación continua** en la que tenemos que recordar al alumnado el concepto de fórmula recurrente de una sucesión.
- La actividad 11 está pensada para realizar en grupo. Puede aprovecharse para que el alumnado trabaje con documentos compartidos en línea. Exige además que los estudiantes investiguen sobre las funciones elementales de las hojas de cálculo.

Cierre

LA MÚSICA DE π

Para finalizar, el profesorado puede presentar las siguientes actividades con el fin de que el alumnado concluya la situación, comparta su propuesta y pueda transferir y aplicar los conocimientos a otras situaciones.

- La actividad 13 viene a dar solución al problema planteado al principio de la situación. Se trata de una actividad interdisciplinar en la que se requieren conceptos elementales de la materia de música. La forma de presentar el resultado es muy relevante, por lo que insistiremos en el uso de la tecnología para compartir las creaciones.
- La actividad 14 se encuadra dentro de la **metodología** *Gamificación,* que enlaza con la esencia del vídeo de la introducción.
- La actividad 15 está ligada al **ODS 5.** *Igualdad de género* y pretende poner en valor el de la mujer en los avances de la ciencia, particularmente en la informática (se puede presentar a la actriz Hedy Lamarr como la persona que inventó el wifi).

REVISA-T

Actividades de metacognición para hacer reflexionar al alumnado sobre su proceso de aprendizaje y cómo se ha sentido a lo largo de él. También le servirá para valorar el grado de participación en las actividades en grupo y su integración en ellos.

- Para la **evaluación final,** ofrecemos unas preguntas en formato digital creadas a partir de los criterios de evaluación, que permitirán al profesorado valorar el grado de adquisición de las competencias específicas y de los saberes y destrezas de la situación de aprendizaje.

  También se facilita una **rúbrica de evaluación final** que puede ser adaptada por el docente y distribuida entre el alumnado.

Para completar el aprendizaje, el alumnado puede consultar las siguientes fichas de saberes y destrezas y realizar las fichas de adaptación curricular de esta guía didáctica:

SABERES

2. Naturales y enteros
3. El conjunto de los racionales
4. El conjunto de los irracionales
8. Error
11. Intervalos de números reales

DESTREZAS

194. Fuentes de información fiables
195. Mujeres matemáticas en la historia
196. Evolución de las matemáticas a lo largo de la historia

ENTRENA CON ADIMAT

Bloque «Números reales», apartados 1 a 6

Practicar +: Representación gráfica de números irracionales (p. 49)

Profundizar +: Números reales (p. 51)

Solucionario
Situaciones de aprendizaje

1 Escucha el número π

¿Qué es π?

1. Respuesta abierta.

2. a) El experimento de la aguja de Buffon es un problema de probabilidad geométrica que consiste en dejar caer una aguja sobre una hoja rayada y anotar las veces que cruza alguna de las rayas. De esta manera nos iremos aproximando al valor del número π a partir de sucesivos intentos.

b) Respuesta abierta.

c) Respuesta abierta.

d) Respuesta abierta.

e) Respuesta abierta.

¡π fue natural!

3. a) El perímetro de un círculo de 10 codos de diámetro es $P = 10 \cdot \pi$. Basta con comparar esta expresión con el valor que aparece en el versículo.

b) $30 = 10 \cdot \pi$, donde $\pi = \frac{30}{10}$, por lo que $\pi = 3$.

Es un número natural.

c) Respuesta abierta.

d) Respuesta sugerida. No es despreciable; se trata de una simplificación o una falta de conocimiento de una aproximación mejor.

e) Respuesta abierta.

4. a) Ha calculado el valor del número π con 100 billones de decimales, la mayor aproximación conseguida hasta el momento.

b) Respuesta abierta.

¡Mesoπtamia!

5. Respuesta abierta.

— Respuesta abierta.

6. a) Respuesta abierta.

b) Respuesta abierta.

c) $\frac{25}{8} = 3{,}125$

d) Un número racional.

¡π fue racional!

7. a) Respuesta abierta.

b) Al tratarse de un hexágono regular, el radio de la circunferencia coincide con el lado del hexágono.

c) El perímetro del hexágono es $6r$.

d) $\frac{P_{hex.}}{P_{circ.}} = \frac{6r}{2\pi r} = \frac{3}{1}$

e) $\frac{3}{\pi} = \frac{24}{25} \rightarrow \pi = \frac{75}{24}$

f) Respuesta abierta.

8. a) El problema 50 del papiro de Ahmes calcula el área de un campo circular cuyo diámetro es de 9 jet. El escriba, Ahmes, se limita a calcular el área del círculo considerándolo igual a la de un cuadrado de lado 9. Dice: «Resta al diámetro $\frac{1}{9}$ del mismo, que es 1. La diferencia es 8. Ahora multiplica 8 veces 8, que da 64. Este es el área del círculo».

b) Respuesta sugerida. En la actualidad sabemos que el área de un campo circular de diámetro 9 jet es $\pi \cdot 4{,}5^2$; según el escriba, ese valor es 64, por lo que: $\pi \cdot 4{,}5^2 = 64 \rightarrow \pi = \frac{64}{4{,}5^2} = 3{,}160\,49$

c) Respuesta abierta.

d) Respuesta abierta.

Calcula π como lo hizo Arquímedes

9. a) $\left[\frac{223}{71}, \frac{22}{7}\right]$

b) Lo lógico sería el punto medio del intervalo:

$$\left(\frac{223}{71} + \frac{22}{7}\right) : 2 = \frac{3123}{994} \approx 3{,}141\,85$$

c) Error absoluto = $|3{,}141\,59 - 3{,}141\,85| = 0{,}000\,26$

Error relativo = $\frac{0{,}000\,26}{3{,}141\,59} = 8{,}27 \cdot 10^{-5}$

10. a) $\pi = \frac{4 \cdot \sqrt{2}}{2} = 2{,}828\,427\,12$

b) $\pi = \frac{8 \cdot x_2}{2} = \frac{8 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{1 - \frac{\sqrt{2}}{4}}}}{2} = 3{,}061\,467$

c) Respuesta abierta.

11. a) Respuesta sugerida. Al implementar la fórmula en una hoja de cálculo vemos cómo el error absoluto empieza en 0,313 655 29 para un polígono de cuatro lados y va disminuyendo hasta $4{,}928\,31 \cdot 10^{-6}$ para un polígono de 1024 lados.

b) Se obtiene 3,141 596 553 704 820 000 000 000 00 como aproximación de π para un polígono de 2 097 152 lados.

12.

Civilización	N.º de decimales exactos con π	Valor que tenían de π
Babilonia	1	3,125
Egipto	1	3,1604
Biblia (1 Reyes 7:23)	0	3
Arquímedes	3	3,1418

La música de π

13. a) Respuesta abierta.

b) Respuesta abierta.

c) Respuesta abierta.

14. a) Respuesta abierta.

b) Respuesta abierta.

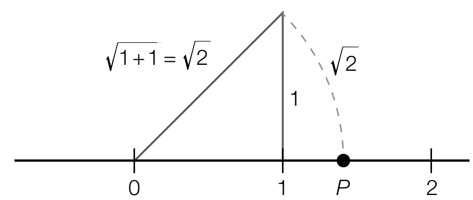
c) Respuesta abierta.

15. Respuesta abierta.

Representación gráfica de números irracionales

- Los **números irracionales** no se representan directamente sobre la recta numérica, ya que se desconoce su valor exacto. Para ello, se utiliza una **representación geométrica** basada en el teorema de Pitágoras.
- Para representar el número irracional $\sqrt{2}$, se utiliza la igualdad $\sqrt{2} = \sqrt{1^2 + 1^2}$, donde *P* representa la posición de $\sqrt{2}$:

$$1 < \sqrt{2} < 2 \rightarrow 1 < 1{,}414213... < 2$$



- De **dos números irracionales es mayor** el que está situado **más a la derecha** de la recta numérica. Entre dos números irracionales situados en la recta real, existe una cantidad ilimitada de números irracionales.

1. Indica entre qué números naturales se encuentran los siguientes números irracionales:

a) $\sqrt{250}$ b) $\sqrt{1000}$ c) $\sqrt[3]{32}$ d) $\sqrt{2000}$

2. Indica entre qué números decimales (hasta las décimas) se encuentran los siguientes valores:

a) Número π c) $\sqrt{17}$ e) $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

b) $\sqrt{7}$ d) $\sqrt{99}$ f) $\sqrt[3]{68}$

3. Representa geométricamente el número irracional $\sqrt{5}$. (Recuerda que $\sqrt{5} = \sqrt{2^2 + 1^2}$.)

4. Representa geométricamente el número irracional $\sqrt{17}$.

5. Representa geométricamente el número irracional $\sqrt{7}$. Observa que $\sqrt{7} = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 2^2}$.

6. A partir de la representación gráfica de $\sqrt{2}$, representa en una misma recta numérica los siguientes números irracionales: $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ y $\sqrt{10}$.

Practicar +

Errores en las aproximaciones de números reales

- El **error absoluto (E_a)** de una aproximación equivale al valor absoluto de la diferencia entre sus valores exacto y aproximado: E_a = **|valor exacto – valor aproximado|**
- El **error relativo (E_r)** es el cociente entre el error absoluto **(E_a)** y el valor exacto: $E_r = \dfrac{E_a}{\text{valor exacto}}$
- El error relativo puede expresarse en forma **porcentual: $E_r \cdot 100$ (%)**
- La **cota de error** es el valor máximo del error cometido.

1. Se ha cronometrado el tiempo equivalente a un minuto y se han obtenido las siguientes mediciones en segundos: 59 s, 59,6 s y 60,2 s. Con estos datos, completa la siguiente tabla:

Medición (s)	Valor exacto	Error absoluto	Error relativo	Error porcentual
59				
59,6				
60,2				

2. El valor del número π ha tenido diversas aproximaciones a lo largo de la historia. Calcula el error relativo de los siguientes casos considerando que su valor exacto sea 3,1415926:

a) $\dfrac{256}{81}$ (antiguo Egipto).

b) 3,125 (antigua Mesopotamia).

c) $\sqrt{10}$ (India).

3. Los catetos de un triángulo rectángulo miden 4 cm y 6 cm, respectivamente. Si se considera una hipotenusa de 7,2 cm, calcula el error porcentual que se ha cometido.

4. Un metro cuadrado de papel para hacer hojas DIN A3 (42 cm x 29,7 cm) pesa 80 g.

a) ¿Cuánto pesarán 100 de estas hojas?

b) Calcula el error relativo que se comete si el peso anterior se aproxima a 1 kg.

5. El número de oro (ϕ) equivale a 1,618033988... Si lo aproximamos a 1,62, su error absoluto es 0,001966..., es decir, inferior a una centésima, por lo que su cota de error es 0,01. Siguiendo esta pauta, calcula la cota de error en los siguientes casos:

a) $\sqrt{60} \simeq 7{,}75$ b) $\sqrt{146} \simeq 12$ c) (15,7 ± 0,1) cm

6. Una balanza de cocina aprecia un peso mínimo de 5 g. Si se han pesado 180 g de harina, ¿entre qué dos pesos reales estará probablemente esta medición?

Profundizar +

1. Considera los números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9, y calcula las sumas indicadas.

0 + 9 = 9   1 + 8 = ...   2 + 7 = ...   3 + 6 = ...   4 + 5 = ...

Explica qué observas y comprueba si esta propiedad se cumple al considerar $\sqrt{0}$, $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$ y $\sqrt{9}$.

2. Ya sabes que cualquier operación (suma, resta, multiplicación y división) de varios números racionales siempre da como resultado un número racional. No pasa lo mismo con los números irracionales. Por ejemplo, en este caso: $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}$, el producto de dos irracionales da como resultado un número racional. Completa estas expresiones de manera que el resultado sea un número racional:

a) $\dfrac{\sqrt{3}-.....}{3}$

b) $\dfrac{.....-\sqrt{5}}{3}+\sqrt{7}$

c) $\dfrac{\pi+\sqrt{3}}{.....-3}+2\sqrt{7}$

d) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{5-\sqrt{.....}}}{\sqrt{3}}$

3. Teniendo en cuenta que $\sqrt{17}=\sqrt{4^2+1}=\sqrt{8+3^2}=\sqrt{2^2+13}=....$, describe tres maneras distintas para representar gráficamente $\sqrt{26}$.

4. Indica cuántas cifras decimales puedes asegurar si calculas:

a) $\sqrt{5}+\sqrt{11}$, considerando hasta las milésimas el valor de los dos radicales.

b) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{11}$, considerando hasta las diezmilésimas el valor de los dos radicales.

c) π^2, considerando hasta las cienmilésimas el valor de π.

d) $e+\phi$, considerando hasta las diezmilésimas el valor de ambos números.

5. Obtén una aproximación decimal para los siguientes números con la precisión requerida:

a) De $\sqrt{13}$ hasta las milésimas.

b) De $\sqrt{\dfrac{7}{5}}$ hasta las centésimas.

c) De $5\sqrt{6}$ con cuatro cifras significativas.

d) De $\dfrac{\sqrt{17}}{4}$ con cinco cifras significativas.

6. Calcula el valor de $1{,}6+1{,}\widehat{6}-1{,}0\widehat{6}$ utilizando las fracciones generatrices.

NÚMEROS REALES

SABERES Y DESTREZAS

Ficha 1

1. a) Naturales
   b) Racionales
   c) Enteros
   d) Racionales
   e) Enteros
   f) Racionales

Ficha 2

1. Por ejemplo:
   a) {2, 4, 10}
   b) {–1, –2, –57}
   c) {–3, –1, 1}

2. Por ejemplo:
   a) Conmutativa.

   Para la suma de números naturales: $2 + 3 = 3 + 2$

   Para el producto de números naturales: $2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$

   Para la suma de números enteros: $(-2) + (-3) = (-3) + (-2)$

   Para el producto de números enteros: $(-2) \cdot (-3) = (-3) \cdot (-2)$

   b) Asociativa.

   Para la suma de números naturales: $(2 + 3) + 5 = 2 + (3 + 5)$

   Para el producto de números naturales: $(2 \cdot 3) \cdot 5 = 2 \cdot (3 \cdot 5)$

   Para la suma de números enteros: $[(-2) + (-3)] + 5 = (-2) + [(-3) + 5]$

   Para el producto de números enteros: $[(-2) \cdot (-3)] \cdot 5 = (-2) \cdot [(-3) \cdot 5]$

3. a) Positivo. b) Cero. c) Negativo. d) Positivo.

4. Divisores de 50 = {1, 2, 5, 10, 25, 50}

   Divisores de 420 = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 12, 14, 15, 20, 21, 28, 30, 35, 42, 60, 70, 84, 105, 140, 210, 420}

   Divisores de 2079 = {1, 3, 7, 9, 11, 21, 27, 33, 63, 77, 99, 189, 231, 297, 693, 2079}

Ficha 3

1. a) Decimal limitado
   b) Periódico mixto
   c) Decimal limitado
   d) Exacto
   e) Periódico puro

2. a) 7
   b) 4423/1000
   c) 99 682/999
   d) 124 107/9990

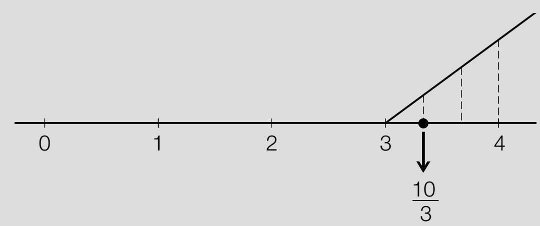
Ficha 4

1. a) Sí, por ser una raíz no exacta.
   b) Sí, por ser cociente de un número irracional y otro racional.
   c) No, porque se expresa como cociente de números enteros.
   d) No, por ser una raíz exacta.
   e) Sí, por ser cociente de un número irracional y otro racional.
   f) No, porque en este cociente de números irracionales se obtiene un número racional.

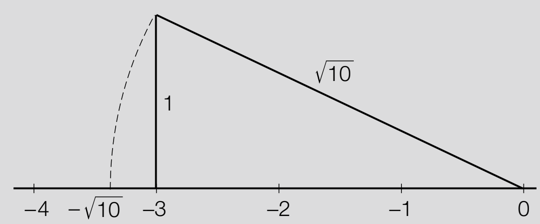
   — Al de los racionales.

Ficha 5

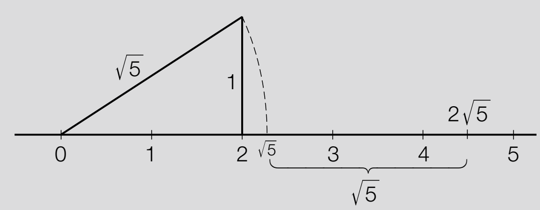
1. a)



   b)

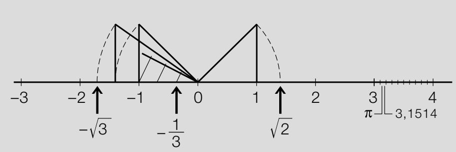


   c)



2. a) $-\sqrt{3} < -\frac{1}{2}$
   b) $\pi < 3{,}1\overset{\frown}{4}$
   c) $\pi < \sqrt{11}$

3.



$$-\sqrt{3} < -\frac{1}{3} < 0 < \sqrt{2} < \pi < 3{,}1514$$

Ficha 6

1. Aplicando el teorema de Pitágoras, $h = \sqrt{2}$. Un ejemplo de aproximaciones sería:

Por defecto: 1 1,4 1,41

Por exceso: 2 1,42 1,415

2. a) 62 62,3 62,32

b) Unidades Décimas Centésimas

Ficha 7

1.

Número	Orden de aproximación	Aproximación por truncamiento	Aproximación por redondeo
0,0034	milésimas	**0,003**	**0,003**
–4,67	**décimas**	–4,6	**–4,7**
11,23	**unidades**	**11**	11
13,66	décimas	**13,6**	**13,7**
0,0016	**milésimas**	0,001	**0,002**
4,55	**décimas**	**4,5**	4,6

Ficha 8

1. a) El mismo error: 2 cm

b) En la piscina, ya que dividimos el mismo error absoluto en ambos casos entre el valor exacto, que en el caso de la piscina es mucho menor.

2.

	Aproximación a las centésimas	
	Por truncamiento	Por redondeo
23,0982	23,09	23,10
–6,083	–6,08	–6,08

— Aproximación por truncamiento:

Error absoluto: $|23{,}0982 - 23{,}09| = 0{,}0082$

Error relativo: $\dfrac{0{,}0082}{23{,}0982} = 0{,}0004$

Error absoluto: $|-6{,}083 - (-6{,}08)| = 0{,}003$

Error relativo: $\dfrac{0{,}003}{6{,}083} = 0{,}0005$

— Aproximación por redondeo:

Error absoluto: $|23{,}0982 - 23{,}10| = 0{,}0018$

Error relativo: $\dfrac{0{,}0018}{23{,}0982} = 0{,}000\,08$

Error absoluto: $|-6{,}083 - (-6{,}08)| = 0{,}003$

Error relativo: $\dfrac{0{,}003}{6{,}083} = 0{,}0005$

El error absoluto en la aproximación por redondeo siempre será menor o igual que el cometido en el truncamiento. Por tanto, el error relativo siempre será menor o igual en el primer caso que en el segundo.

Ficha 9

1. Una cota de error absoluto sería $6{,}54 - 6{,}53 = 0{,}01$.

2. La forma correcta de expresar la masa del bebé sería $5{,}76 \pm 0{,}02$ kg.

Ficha 10

1. Teniendo en cuenta que:

$$3{,}14 \leq \pi \leq 3{,}15 \text{ y } 2{,}82 \leq \sqrt{8} \leq 2{,}83$$

Calculamos las siguientes operaciones con el número de cifras decimales exactas y aportando una cota de error.

a) $\pi + \sqrt{8}$

$$3{,}14 + 2{,}82 \leq \pi + \sqrt{8} \leq 3{,}15 + 2{,}83$$

$$5{,}96 \leq \pi + \sqrt{8} \leq 5{,}98$$

Solo podemos aceptar una de las cifras decimales obtenidas para la operación. Por tanto:

$$\pi + \sqrt{8} \simeq 5{,}9$$

Una cota de error sería: $\pi + \sqrt{8} = 5{,}97 \pm 0{,}01$

b) $\pi - \sqrt{8}$

$$3{,}14 - 2{,}82 \leq \pi - \sqrt{8} \leq 3{,}15 - 2{,}83$$

$$0{,}32 \leq \pi + \sqrt{8} \leq 0{,}32$$

Aceptamos las dos cifras decimales obtenidas para la operación. Por tanto:

$$\pi - \sqrt{8} \simeq 0{,}32$$

Una cota de error sería: $\pi - \sqrt{8} = 0{,}320 \pm 0{,}001$

c) $\pi \cdot \sqrt{8}$

$$3{,}14 \cdot 2{,}82 \leq \pi \cdot \sqrt{8} \leq 3{,}15 \cdot 2{,}83$$

$$8{,}85 \leq \pi \cdot \sqrt{8} \leq 8{,}91$$

No podemos aceptar ninguna de las cifras decimales obtenidas. Por tanto:

$$\pi \cdot \sqrt{8} \simeq 9$$

Una cota de error sería: $\pi \cdot \sqrt{8} = 8{,}8 \pm 0{,}1$

d) $\pi : \sqrt{8}$

$$3{,}14 : 2{,}82 \leq \pi : \sqrt{8} \leq 3{,}15 : 2{,}83$$

$$1{,}1134 \leq \pi : \sqrt{8} \leq 1{,}1130$$

Solo podemos aceptar tres de las cifras decimales obtenidas para la operación. Por tanto:

$$\pi : \sqrt{8} \simeq 1{,}113$$

Una cota de error sería: $\pi : \sqrt{8} = 1{,}1132 \pm 0{,}0002$

e) $\left(\pi + \sqrt{8}\right) \cdot \sqrt{8}$

Ahora debemos tener en cuenta los resultados de apartados anteriores:

$5{,}96 \leq \pi + \sqrt{8} \leq 5{,}98$ $\qquad$ $2{,}82 \leq \sqrt{8} \leq 2{,}83$

$$5{,}96 \cdot 2{,}82 \leq \left(\pi + \sqrt{8}\right) \cdot \sqrt{8} \leq 5{,}98 \cdot 2{,}83$$

$$16{,}8 \leq \left(\pi + \sqrt{8}\right) \cdot \sqrt{8} \leq 16{,}9$$

No podemos aceptar ninguna de las cifras decimales obtenidas. Por tanto:

$$\left(\pi + \sqrt{8}\right) \cdot \sqrt{8} \simeq 16$$

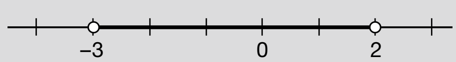
Una cota de error sería:

$$\left(\pi + \sqrt{8}\right) \cdot \sqrt{8} = 16{,}8 \pm 0{,}1$$

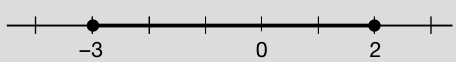
Ficha 11

1. [7, +∞)

2. a) (–3, 2)

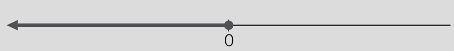


b) [–3, 2]



c)

d)



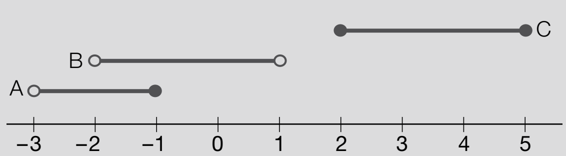
Ficha 12

1. a) (–3, 1)

b) (–3, –1] U [2, 5]

c) (–3, 1) U [2, 5]

2.



a) (–2, –1] b) ∅ c) ∅

3. a) (–∞, +∞) b) ∅

Actividades de consolidación

1. Infinitos. El conjunto de los números enteros pares se puede definir como $2 \cdot \mathbb{Z} = \{2z, z \in \mathbb{Z}\}$; como $\mathbb{Z}$ es infinito, $2\mathbb{Z}$ también lo es.

2. a) Naturales, enteros, racionales, irracionales y reales.

b) Naturales, enteros y racionales. Los irracionales y, por tanto, una parte de los reales solo podemos colocarlos de forma aproximada.

c) Enteros.

d) Irracionales.

3. a) Falso. 3 – 4 = –1 no es natural.

b) Falso. 6 : 5 = 1,2 no es entero.

c) Cierto.

d) Cierto.

e) Falso. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$ no es irracional.

f) Falso. $\frac{2}{3}$ no es irracional.

4. Sea $z \in \mathbb{Z}$, si $z = \frac{z}{1} \rightarrow z \in \mathbb{Q}$

5. a) 4423/1000

b) 99 872/999

c) 124 107/9990

6. a) $x = -2{,}45$

$100x = -245$

$x = -\frac{245}{100} = -\frac{49}{20}$

b) $x = -33{,}5\widehat{65}$

$1000x = -33\,565{,}\widehat{65}$

$-10x = -335{,}\widehat{65}$

$990x = -33\,230$

$x = -\frac{33\,230}{990} = -\frac{3323}{99}$

c) Es un número irracional y no tiene fracción generatriz.

d) Calculamos la fracción generatriz de $1{,}\widehat{3}$.

$$x = 1{,}\widehat{3}$$
$$10x = 13{,}\widehat{3}$$
$$-x = 1{,}\widehat{3}$$
$$9x = 12$$
$$x = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

Calculamos la fracción generatriz de $0{,}85\widehat{6}$.

$$x = 0{,}85\widehat{6}$$
$$1000x = 856{,}\widehat{6}$$
$$-100x = 85{,}\widehat{6}$$
$$900x = 771$$
$$x = \frac{771}{900} = \frac{257}{300}$$

Para calcular la fracción generatriz de $1{,}\widehat{3} + 0{,}85\widehat{6}$, sumamos:

$$\frac{4}{3} + \frac{257}{300} = \frac{219}{100}$$

7. Únicamente es irracional el número 1,2020020002... Los otros, al ser decimales exactos, periódicos o expresados como fracción, son racionales.

8. a) Racional; b) irracional; c) racional; d) racional; e) irracional; f) irracional.

9. Los apartados *a* y *c*.

10. a) Falsa. 3 y 4 son dos números enteros comprendidos entre $\sqrt{5}$ y $\sqrt{17}$.

b) Cierta.

c) Falsa. Los números decimales ilimitados no periódicos no son números racionales.

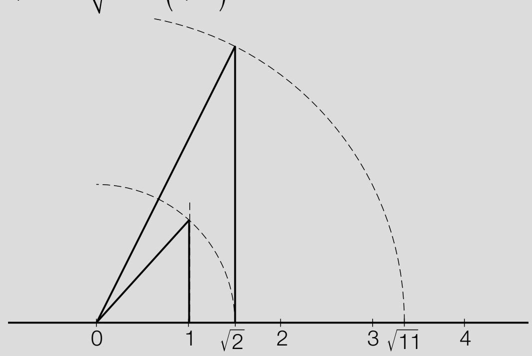
d) Cierta.

11. a) $-\frac{2}{5} < -\frac{2}{7} < 0$

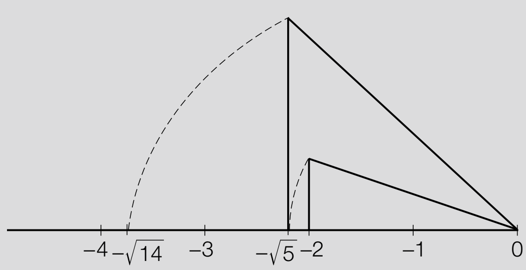
b) $-\sqrt{100} < -9,\widehat{9} < -9,91$

c) $-\frac{7}{3} < -2,3 < \sqrt[3]{-8}$

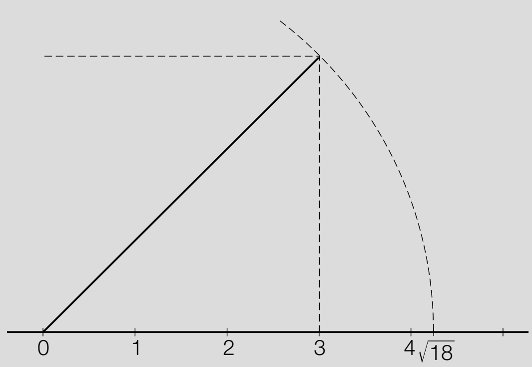
12. a) $\sqrt{11} = \sqrt{3^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2}$



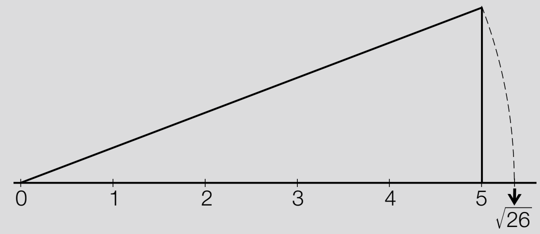
b) $-\sqrt{14} = -\sqrt{3^2 + \left(\sqrt{5}\right)^2}$



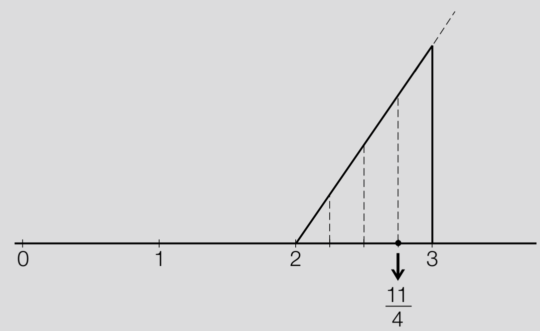
c) $\sqrt{18} = \sqrt{3^2 + 3^2}$



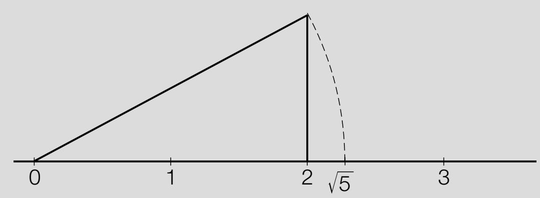
d) $\sqrt{26} = \sqrt{5^2 + 1^2}$



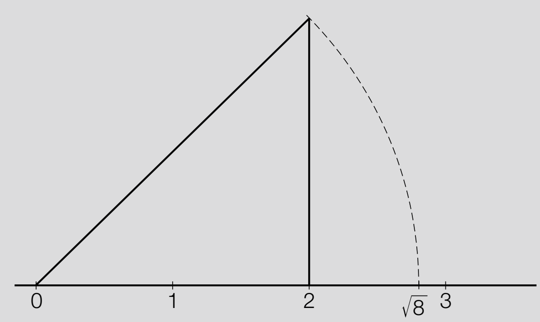
13. a)



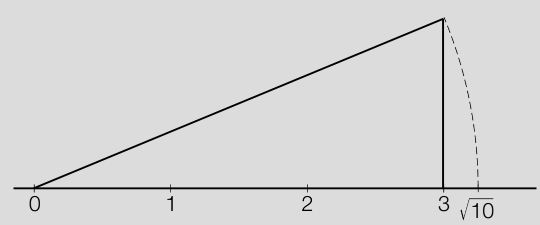
b)



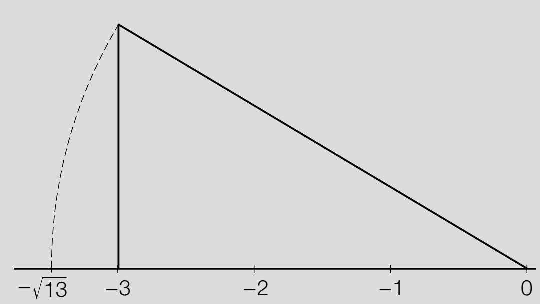
c)



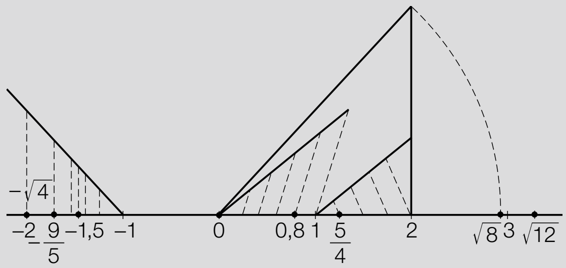
d)



e)



14. $-\sqrt{4} < -\frac{9}{5} < -1{,}5 < 0 < 0{,}8 < \frac{\sqrt{25}}{4} < \sqrt{8} < 2\sqrt{3}$



15. a) Falso. Si la raíz es entera, el número es racional.

b) Falso. El 1 no es irracional.

c) Verdadero. Por ejemplo: $e + \pi$

d) Verdadero. Los números pares están contenidos en el conjunto de los números enteros.

e) Falso. Es una de sus características, que no pueden ser representados por fracciones.

16. 45,8 45,80 45,806

17. a) 1,732 b) 0,2 c) 4,22

18. Error absoluto = 40 – 38 = 2

$$\text{Error relativo} = \frac{2}{40} = 0{,}05 = 5\,\%$$

El porcentaje de error relativo cometido es del 5 %.

19. a) 5 d) 5

b) Infinitas. e) 3

c) 5 f) 4

20. a) 1,732

b) –1,0

c) 43,07

d) 1,58113

21. a) y b)

Calle	Valor exacto	Valor aproximado	Valor exacto – Valor aproximado	Error absoluto	Error relativo
A	905	952	–47	47	0,052
B	299	325	–26	26	0,087

c) La medida de la calle A es la que se realizó con mayor precisión, ya que el error relativo es más pequeño.

22. El redondeo hasta las milésimas es $\sqrt{7} = 2{,}646$. Tenemos que $|2{,}645751311... - 2{,}646| \simeq 0{,}00025$. Por tanto, una cota del error absoluto es 0,001.

23. El número está comprendido entre 23,66 y 23,74.

Dos cotas de error válidas serían:

$$23{,}70 \pm 0{,}04$$

$$23{,}7 \pm 0{,}1$$

24. Hallamos la longitud del parterre:

$$L = 2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot \pi \cdot 0{,}75 = 1{,}5 \cdot \pi$$

Si tomamos 3,141 como aproximación por defecto de π, la longitud aproximada del parterre es:

$$L = 1{,}5 \cdot \pi = 1{,}5 \cdot 3{,}141 = 4{,}7115 \text{ m}$$

En consecuencia, 4,71 m de valla no son suficientes para cercar el parterre.

25. Un error del 0,8 % implica un error relativo de 0,008.

Aplicando la expresión del error relativo, tenemos que:

$$0{,}008 = \frac{e - \text{Valor aprox.}}{e}$$

$$\text{Valor aprox.} = (1 - 0{,}008) \cdot e = 2{,}697$$

Por tanto, si expresamos el valor de e con 2 cifras significativas, el error cometido será inferior al 0,8 %.

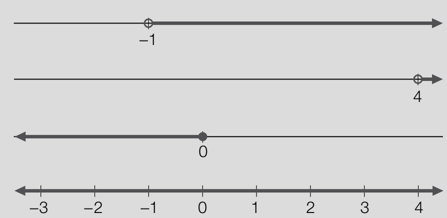
26. $A = \pi \cdot r^2$

a) $A = 3{,}1415 \cdot 5^2 = 78{,}5375$

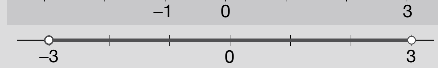
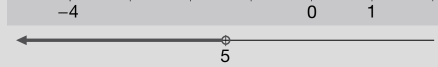
b) $A = 3{,}1416 \cdot 5^2 = 78{,}54$

En la aproximación por exceso, porque 3,1416 tiene una cota de error absoluto de una cienmilésima y, en cambio, 3,1415 no tiene una cota de error tan pequeña.

27. a) b) c) d)

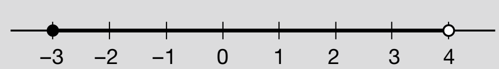


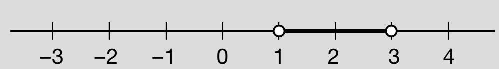
28.

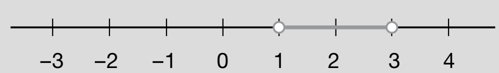
Representación	Intervalo
	[–1, 3]
	**(–3, 3)**
	**[–4, 1]**
	(–∞, 5)
	[2, +∞)

29. (–8, –2)

30.



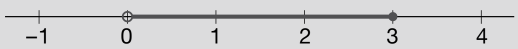


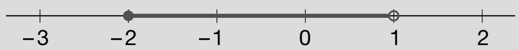


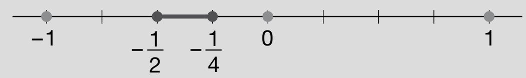
(1, 3)

31. $A = (-\infty, -6]$, $B = (-6, +\infty)$

32. a) $[1, 4)$ b) $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{13}{5}\right)$ c) $\left(-4{,}5; -\sqrt{5}\right]$

33. a)


b)


c)


d)


34. a) $[4{,}6 \cdot 10^{14}; 7{,}5 \cdot 10^{14}]$ b) $[-20, 0]$ c) $[0; 3{,}6]$

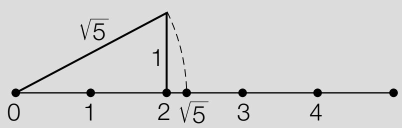
GUÍA DIDÁCTICA

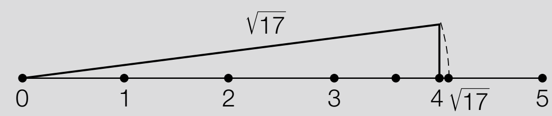
Practicar +

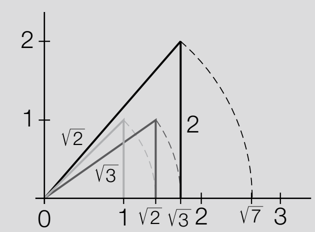
Ficha 1: Representación gráfica de números irracionales

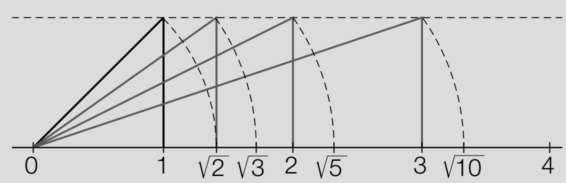
1. a) Entre 15 y 16 c) Entre 3 y 4
b) Entre 31 y 32 d) Entre 44 y 45

2. a) Entre 3,1 y 3,2 d) Entre 9,9 y 10,0
b) Entre 2,6 y 2,7 e) Entre 1,6 y 1,7
c) Entre 4,1 y 4,2 f) Entre 4,0 y 4,1

3.


4.


5.


6.


Ficha 2: Errores en las aproximaciones de números reales

1.

Medición (s)	Valor exacto (s)	Error absoluto (s)	Error relativo	Error porcentual
59	60	$\lvert 60 - 59 \rvert = 1$	$\dfrac{1}{60} \simeq 0{,}0167$	$0{,}0167 \cdot 100 = 1{,}67\,\%$
59,6	60	0,4	0,0067	0,67 %
60,2	60	0,2	0,0033	0,33 %

2. a) $\dfrac{256}{81} = 3{,}16049382...$

$E_a = \lvert 3{,}1415926 - 3{,}16049382... \rvert \simeq 0{,}0189$

$$E_r = \frac{0{,}0189}{3{,}1415926} \simeq 0{,}006$$

b) $E_a = 0{,}0166$; $E_r \simeq 0{,}0053$

c) $\sqrt{10} \simeq 3{,}16227766... \rightarrow$
$\rightarrow E_a \simeq 0{,}0207$; $E_r \simeq 0{,}0066$

3. $h = \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{52} \simeq 7{,}21110255 \rightarrow$
$E_a \simeq 0{,}0111$; $E_r \simeq 0{,}00154 = 0{,}154\,\%$

4. a) Una hoja DIN A3: $42 \cdot 29{,}7 = 1247{,}4$ (cm²) $\rightarrow$
$\rightarrow$ 100 hojas: 124 740 cm² = 12,474 m²

$$\frac{1}{80} = \frac{12{,}474}{x} \rightarrow x = 997{,}92$$

Las 100 hojas pesan 997,92 g.

b) 1 kg = 1000 g $\rightarrow E_a = \lvert 1000 - 997{,}92 \rvert = 2{,}08$

$$E_r = \frac{2{,}08}{997{,}92} \simeq 0{,}0021$$

5. a) $\sqrt{60} = 7{,}7459667... \rightarrow E_a = \lvert 7{,}75 - 7{,}7459667... \rvert =$ $= 0{,}004033... < 0{,}01 \rightarrow$ Cota de error: 0,01 (una centésima).

b) $\sqrt{146} = 12{,}0830459... \rightarrow$
$E_a = \lvert 12{,}0830459... - 12 \rvert = 0{,}083046... < 0{,}1 \rightarrow$ $\rightarrow$ Cota de error: 0,1 (una décima).

c) Cota de error $\rightarrow$ 0,1 cm = 1 mm

6. $180 \pm 5 \rightarrow 180 + 5 = 185$; $180 - 5 = 175 \rightarrow$ La harina pesará con mucha seguridad entre 175 g y 185 g.