GUÍA DIDÁCTICA

Física 2

BACHILLERATO

1 # Cambiemos de aires

1. Observa

Se plantea una situación en la que el alumnado podrá seguir los pasos del programa espacial Artemis, explicando sus fases.

El plan de vuelo se inicia con la puesta en movimiento del cohete y sigue con el escape de la atracción gravitatoria terrestre y la puesta en órbita lunar. Tras el alunizaje será necesario escapar de la superficie lunar para regresar a la Tierra. El objetivo es comprender y dar viabilidad a cada fase con la ayuda de la física.

2. Formula la hipótesis

El alumnado debe plantear una hipótesis sobre los principios físicos que explican y posibilitan cada una de las fases de la misión.

Las preguntas van encaminadas a que el alumnado piense en la conservación de la cantidad de movimiento a la hora de impulsar y dotar de una velocidad creciente a la nave espacial. La conservación, en ausencia de rozamiento, de la energía mecánica, en sus formas cinética y potencial, está en la base del escape y de la puesta en órbita del cohete.

3. Investiga

— Durante la fase de despegue:

1. El sistema formado por el cohete y su combustible se considera aislado en ausencia de fuerzas externas. En el instante inicial ($t = 0$) cohete y combustible forman un conjunto de masa total M con velocidad nula. Pero, pasado un intervalo de tiempo Δt, el sistema se ha dividido en dos subsistemas: cohete de masa $M - m$ con velocidad ascendente y combustible (gases de combustión) de masa m con velocidad descendente.
2. La ausencia de fuerzas exteriores, de acuerdo con la segunda ley de Newton, implica una variación nula de la cantidad de movimiento (o momento lineal). La cantidad de movimiento se conserva y por tanto se mantiene constante entre dos intervalos de tiempo.
3. Si la cantidad de movimiento total se conserva, en cualquier instante de tiempo su valor ha de ser nulo, como en el instante inicial. Los momentos lineales (y los movimientos) del combustible expulsado por un lado y del cohete por otro serán opuestos, lo que permite mantener nula su suma. Si la masa del cohete va disminuyendo a lo largo de la ascensión, su velocidad deberá ir aumentando para equilibrar la cantidad de movimiento del combustible, cuya masa expulsada se va incrementando durante la ignición.

— Escape de la atracción gravitatoria de la Tierra:

1. Un campo vectorial de fuerzas es central si todas las líneas de campo parten de un mismo punto. Un campo central resulta conservativo, es decir: el trabajo realizado para trasladar una partícula de un punto a otro del campo solo depende de los puntos inicial y final, no del camino seguido. Esto implica que la energía mecánica se conserva.

   El campo gravitatorio es central, pues las líneas de campo (y las fuerzas) van siempre dirigidas a lo largo de la línea que une las masas que se atraen. Por ello, el campo gravitatorio es conservativo y la energía mecánica del cohete se mantendrá constante, se conservará.

2. Velocidad de escape:
   - La energía potencial gravitatoria del cohete de masa m sobre la superficie terrestre viene dada por la siguiente expresión (se considera que la energía potencial es nula en los puntos situado a una distancia infinita de la Tierra):

   $$E_p = -G\frac{M_T}{R_T}m$$

   - La energía cinética del cohete, de masa m, sobre la superficie de la Tierra y con una velocidad igual a la de escape v_e será:

   $$E_c = \frac{1}{2}mv_e^2$$

   - Aplicamos el principio de conservación de la energía mecánica entre un punto A, situado sobre la superficie terrestre, y otro punto B, a una distancia infinita de la Tierra, al que el cohete llega con velocidad nula:

   $$E_{mA} = E_{mB} = 0 \qquad E_{cA} + E_{pA} = 0$$

   $$\frac{1}{2}mv_e^2 - G\frac{M_T}{R_T}m = 0; \frac{1}{2}mv_e^2 = G\frac{M_T}{R_T}m;\ v_e^2 = 2G\frac{M_T}{R_T}$$

   $$v_e = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}$$

— Colocación de la nave Orión en la órbita lunar.

1. La fuerza gravitatoria actúa como fuerza centrípeta en el movimiento circular de la nave en órbita lunar. Por tanto, a partir de la segunda ley de Newton, la fuerza gravitatoria será igual al producto de la masa por la aceleración normal:

$$F_g = ma_n \qquad G\frac{M_L m}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \qquad v = \sqrt{G\frac{M_L}{r}}$$

— Escape de la superficie de la Luna y vuelta a la Tierra.

1. Como hicimos para el caso de la velocidad de escape del campo gravitatorio terrestre aplicando la conservación de la energía mecánica, para el caso de la Luna obtenemos:

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM_L}{R_L}}$$

4. Obtén conclusiones

Una vez terminado el trabajo de investigación, el alumnado habrá constatado que los principios físicos que permiten comprender y explicar las diferentes fases del viaje espacial son:

— La conservación de la cantidad de movimiento.

— La conservación de la energía mecánica en campos centrales y conservativos.

— El papel de la fuerza gravitatoria en el movimiento orbital.

Para exponer sus conclusiones han de elaborar un informe con el plan completo de vuelo detallando las diferentes fases con las condiciones que se deben cumplir para llevar a buen término cada una. Han de hablar de la expulsión del combustible para adquirir una velocidad creciente y de la energía mecánica cuya conservación les permite calcular las velocidades de escape de los campos gravitatorios terrestre y lunar. Tienen que entender que las pérdidas energéticas debidas a la existencia del rozamiento del cohete con la atmósfera hacen que se requiera una velocidad de escape mayor que la obtenida a partir de la conservación de la energía mecánica.

5. Comunica

Como último paso se deben comunicar los resultados del estudio. Para ello se les propone asistir a una reunión virtual en la que han de explicar al equipo de astronautas de la misión el plan de vuelo previsto mediante una presentación digital.

Previamente el profesor indicará los aspectos más importantes de forma y de contenido que tiene que cumplir la presentación.

Cierre de la situación de aprendizaje

...3, 2, 1, *zero... lift-off*

1. Considerando aislado el sistema formado por el cohete SLS, aplicamos la conservación de la cantidad de movimiento.

a) Datos: $M = 2600$; $t = 2{,}600 \cdot 10^6$ kg; $m = 1200$; $t = 1{,}200 \cdot 10^6$ kg; $v_g = 150$ m/s

Consideramos aislado el sistema formado por el cohete SLS y aplicamos la conservación de la cantidad de movimiento:

Cantidad de movimiento inicial = 0

Cantidad de movimiento final = $p_c + p_g =$
$= (M - m)\, v_c + m\, v_g = 0$

Prescindiendo de los signos:

$$v_c = \frac{1{,}200 \cdot 10^6 \text{ kg} \cdot 150 \text{ m/s}}{1{,}400 \cdot 10^6 \text{ kg}} = 129 \text{ m/s}$$

b) Dato: $v_c = 200$ m/s

Para alcanzar 200 m/s de velocidad de despegue sin reducir la masa del cohete, podemos actuar sobre la cantidad de movimiento del combustible aumentando su masa o la velocidad con la que son expulsados los gases de combustión.

La cantidad de movimiento del cohete será:

$$p_c = (M - m)\, v_c = 1{,}400 \cdot 10^6 \text{ kg} \cdot 200 \text{ m} = 2{,}80 \cdot 10^8 \text{ kg·m/s}$$

Esta cantidad de movimiento debe ser la misma que la del combustible, por lo que:

— Si queremos modificar la masa de combustible, esta debe ser:

$$p_g = m v_g \rightarrow m = \frac{p_g}{v_g} = \frac{2{,}80 \cdot 10^8 \text{ kg} \cdot \text{m/s}}{150 \text{ m}} = 1{,}87 \cdot 10^6 \text{ kg} = 1870 \text{ t}$$

— Si queremos modificar la velocidad de los gases de combustión, esta ha de ser:

$$p_g = m v_g \rightarrow v_g = \frac{p_g}{m} = \frac{2{,}80 \cdot 10^8 \text{ kg·m/s}}{1{,}200 \cdot 10^6 \text{ kg}} = 233 \text{ m/s}$$

c) Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N·m²·kg⁻²; $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; $R_T = 6{,}37 \cdot 10^6$ m; $M_L = 7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg; $R_L = 1{,}74 \cdot 10^6$ m

Velocidad de escape de la superficie de la Tierra:

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{6{,}37 \cdot 10^6 \text{ m}}} = 1{,}12 \cdot 10^4 \text{ m/s}$$

d) Velocidad orbital de Orión alrededor de la Luna (supondremos que los 70 000 km son respecto a la superficie lunar (h); $r = h + R_L$):

$$v = \sqrt{G\frac{M_L}{r}} = \sqrt{6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2} \cdot \frac{7{,}35 \cdot 10^{22} \text{ kg}}{7{,}174 \cdot 10^7 \text{ m}}} = 261 \text{ m/s}$$

e) Velocidad de escape de la superficie lunar:

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM_L}{R_L}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2} \cdot 7{,}35 \cdot 10^{22} \text{ kg}}{1{,}74 \cdot 10^6 \text{ m}}} = 2{,}37 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

2. a) A medida que la masa de los gases de combustión expulsados (el combustible quemado) aumenta, su cantidad de movimiento también se hace mayor. Para mantener constante el momento lineal total, la cantidad de movimiento del cohete debe incrementarse en la misma medida (en sentido contrario).

Además, como la masa del cohete disminuye con el tiempo, para una misma cantidad de movimiento la velocidad cada vez ha de ser mayor. Esto redunda en el incremento de velocidad progresivo del cohete.

b) La variación de masa que sufre el cohete no tiene incidencia en las fases de escape del campo gravitatorio y de puesta en órbita alrededor de la Luna o de la Tierra. Esto es así porque, si nos fijamos en las expresiones matemáticas de la velocidad de escape y la velocidad orbital, no dependen de la masa del cohete.

3. Respuesta sugerida:

a) La misión Artemis pretende preparar una presencia permanente en la Luna y en órbita lunar como paso previo para enviar humanos a Marte.

Las limitaciones para transportar los recursos necesarios para la vida de los seres humanos en la Luna o Marte impulsarán la investigación para obtener estos recursos *in situ* y para aprovecharlos de manera más eficiente, de forma que permitan el autoabastecimiento. Estos avances podrían proporcionar nuevas fuentes de energía o nuevas tecnologías para su uso en la Tierra.

b) Como hemos visto, los principios de la física permiten determinar los parámetros necesarios para hacer viable cada fase de la misión espacial.

c) La inversión económica en este tipo de proyectos está justificada en la medida en la que aporten un retorno en forma de avances científicos, tecnológicos o en sostenibilidad de los que pueda beneficiarse nuestra sociedad para su desarrollo.

La investigación científica

Actividades (Pág. 11)

1. El conocimiento científico debe ser riguroso y crítico. Es racional, ordenado y objetivo. La ciencia básica puede ser observacional, experimental o formal, según su método para llegar al conocimiento.

2. El método de revisión a ciegas, también llamado de *revisión por pares* (en inglés, *peer review*), se basa en la revisión anónima de dos o más revisores, generalmente expertos en la materia.

Cuando un científico decide publicar sus resultados, lo hace enviando un artículo a una revista. El editor de esta, una vez analizado el encaje del contenido del artículo en la revista, lo envía a dos o más revisores externos, anónimos, que evalúan la calidad y la solidez del artículo, y lo aceptan o lo rechazan proponiendo cambios más o menos importantes y sugiriendo posibles mejoras que los autores pueden contemplar antes de su publicación. El editor recibe los informes de estos revisores *(referees)* y se los envía al autor, que desconoce la identidad de los científicos que han evaluado su artículo.

Las revistas JCR son las que forman parte del *Journal Citation Reports,* una lista de las revistas más citadas y, teóricamente, de mayor calidad, clasificadas según el llamado *índice de impacto.* Publicar en las revistas que conforman la JCR es el modo en el que se evalúa la carrera científica. Se puntúa según el número de citas de los artículos de un determinado científico que aparecen en otros artículos científicos.

3. Respuesta sugerida:

Entre una multitud de temas científicos, proponemos, por ejemplo, «ola de calor». Si lo consultamos en el buscador Google genérico, aparecen conceptos generales y variados que, en su mayoría, no habrán sido revisados. Por su parte, en el buscador Google académico encontramos solo los artículos e informes científicos de asociados, generalmente sometidos al proceso de revisión por pares descrito en la actividad anterior.

4. Tiempo: dependiente; altura: independiente; distancia recorrida: dependiente; gravedad: externa; velocidad del viento: externa.

5. a) Inducción.

b) Deducción.

c) Inducción.

6. Respuesta sugerida:

Una propuesta podría ser el experimento de Michelson-Morley. La hipótesis de trabajo era probar la existencia del éter en el espacio exterior. De existir, el éter debería modificar la velocidad de la luz según la dirección de propagación del rayo de luz, ya que la Tierra, en su movimiento a través del éter, modificaría a este y generaría un viento que aceleraría los rayos de luz, mientras que en otras zonas tal velocidad quedaría frenada. Para verificar o rechazar la hipótesis, Michelson construyó el llamado *interferómetro de Michelson,* con el que Michelson y Morley demostraron que el éter no existe. Esto provocó que Einstein planteara una nueva hipótesis: la velocidad de la luz es la misma en cualquier sistema de referencia, lo que le permitió desarrollar la teoría de la relatividad especial.

7. a) Falso. En cada experimento o estudio podía haber demasiadas variables no controladas que afectaran al resultado final del experimento. Por ejemplo, cada individuo tiene múltiples respuestas ante un estímulo externo. Esto hace imposible inferir leyes sobre el comportamiento humano.

b) No necesariamente. El experimento se podría centrar en estudiar el comportamiento de una variable que recibiera influencias de muchas otras no controladas.

c) Un resultado experimental en psicología puede diferir en las réplicas por lo expuesto anteriormente. Esto no impide que se pueda publicar, dejando bien claro que se trata de un caso específico. Por ejemplo, la respuesta de la atención de un colectivo al bochorno (temperatura y humedad elevadas) dependerá de muchos factores propios del grupo. Se podría publicar, pues, a pesar de que el mismo experimento en otro colectivo dé resultados diferentes.

d) Esto depende de los criterios de las revistas científicas. Normalmente se indican las condiciones en las que se han llevado a cabo los experimentos, lo que permite ver si hay sesgos que puedan impedir generalizar las conclusiones o repetir los experimentos.

1 # Movimiento, fuerzas y energía

Nos situamos (Pág. 27)

A. Respuesta sugerida:

— Respuesta evitable: Los patinadores lo hacen solo porque queda bonito. En su lugar, los alumnos deben comprender que los movimientos de brazos y piernas van unidos a cambios en la velocidad de giro de los patinadores.

— ¿La velocidad de giro aumenta o disminuye al mover brazos y piernas? ¿Depende de si los movimientos son hacia fuera (extensiones) o hacia dentro (contracciones)? ¿Ocurre tanto cuando están sobre el suelo como en el aire?

— Hay que encaminar a los alumnos a investigar la relación entre el tipo de movimiento de las extremidades y el sentido en el que cambia la velocidad de giro.

Se puede investigar fácilmente observando vídeos de patinaje artístico.

La conservación del momento angular nos da la explicación:

- Cuando se realizan contracciones de brazos y piernas, la velocidad de giro aumenta.
- Cuando se realizan extensiones de brazos y piernas, la velocidad de giro disminuye.

También da pie a hablar de la fuerza de rozamiento, ya que la fricción es muy pequeña entre las cuchillas y el hielo —de ahí que se pueda despreciar— y el momento angular se conserva.

B. Respuesta sugerida:

Conservación de la energía mecánica (en ausencia de fuerzas disipativas).

Conservación del momento lineal (si la resultante de las fuerzas externas es nula).

Conservación del momento angular (en fuerzas centrales o si el momento de la fuerza resultante es nulo).

Problemas resueltos (Págs. 50 a 52)

1. Dato: vector posición: $\vec{r}(t) = (t-1)\vec{i} + (t^2 + 2t - 1)\vec{j}$ (SI)

a) La posición inicial se obtiene sustituyendo en el vector posición $t = 0$:

$$\vec{r}(0) = -\vec{i} - \vec{j}\ \text{m}$$

b) La velocidad media es el cociente entre el vector desplazamiento y el tiempo transcurrido:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t=1) - \vec{r}(t=0)}{1-0} = \frac{2\vec{j} - (-\vec{i} - \vec{j})}{1} = \vec{i} + 3\vec{j}$$

$$\vec{v}_m = (\vec{i} + 3\vec{j})\,\text{m·s}^{-1}$$

c) La derivada del vector posición es el vector velocidad:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{i} + (2t+2)\vec{j}\ \text{m·s}^{-1}$$

La derivada del vector velocidad es la aceleración:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 2\vec{j}\ \text{m·s}^{-2}$$

2. Dato:

Ecuaciones paramétricas: $x = 3t^2$; $y = 5(t^2 - 7)$ (SI)

a) La ecuación de la trayectoria se determina eliminando el tiempo; en este ejercicio, resulta más conveniente despejar t^2 en lugar de t.

$$x = 3t^2 \rightarrow t^2 = \frac{x}{3}$$

Y sustituyendo en la segunda ecuación paramétrica:

$$y = 5(t^2 - 7) \rightarrow y = 5\left(\frac{x}{3} - 7\right) \rightarrow y = \frac{5}{3}x - 35$$

Esta ecuación de la trayectoria corresponde a una línea recta.

b) La componente tangencial de la aceleración es la derivada del módulo del vector velocidad.

Empezamos obteniendo el vector velocidad como la derivada del vector posición:

$$\vec{r} = 3t^2\vec{i} + 5(t^2 - 7)\vec{j}\ \text{m}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 6t\vec{i} + 10t\vec{j} = 2t(3\vec{i} + 5\vec{j})\ \text{m·s}^{-1}$$

El módulo del vector velocidad es:

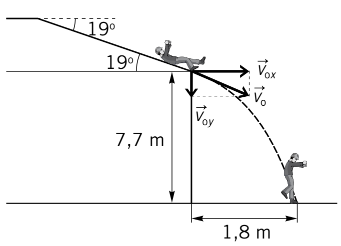
$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(2t)^2(3^2 + 5^2)} = 2\sqrt{34}\,t\ \text{m·s}^{-1}$$

Y derivando, se obtiene la aceleración tangencial:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = 2\sqrt{34} = 11{,}7\ \text{m·s}^{-2}$$

Como la trayectoria es una línea recta, el radio de curvatura es infinito y la aceleración normal, nula.

3. Datos:



El operario realiza un movimiento en dos dimensiones cuya combinación es un movimiento parabólico:

— Eje *X:* MRU.

— Eje *Y:* MRUA.

Utilizamos la ecuación del MRU a fin de obtener una expresión para el tiempo de caída:

$$x(t) = v_{0x}t = v_0 \cos \alpha t \rightarrow 1{,}8 = v_0 \cos(-19°)t \rightarrow$$

$$\rightarrow t = \frac{1{,}8}{v_0 \cos(-19°)}$$

Sustituimos en la ecuación del MRUA y calculamos hasta obtener la velocidad inicial del operario:

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow 0 = 7{,}7 + v_0 \operatorname{sen}(-19°)t - 4{,}9t^2$$

$$0 = 7{,}7 + \cancel{v_0} \operatorname{sen}(-19°)\frac{1{,}8}{\cancel{v_0} \cos(-19°)} - 4{,}9\left(\frac{1{,}8}{v_0 \cos(-19°)}\right)^2$$

$$\frac{15{,}876}{v_0^2 \cos^2(-19°)} = 7{,}7 + 1{,}8 \operatorname{tg}(-19°)$$

$$v_0^2 = \frac{15{,}876}{\cos^2(-19°)\left(7{,}7 + 1{,}8 \operatorname{tg}(-19°)\right)} = 2{,}5$$

$$v_0 \simeq 1{,}6 \text{ m·s}^{-1}$$

4. El movimiento de la pastilla de jabón puede estudiarse a partir de las causas que lo producen (aplicando la segunda ley de Newton) o a partir de las transformaciones energéticas que tienen lugar. Este segundo planteamiento es más cómodo en este caso.

Sobre la pastilla de jabón está actuando una fuerza de rozamiento que es no conservativa. Por tanto:

$$\Delta E_m = W_{\text{no cons.}} \rightarrow \Delta E_c + \Delta E_p = W_{\text{roz.}}$$

$$\left(0 - \frac{1}{2}mv_0^2\right) + (mgh_f - 0) = F_r \cdot \Delta r \cdot \cos 180°$$

Hallamos la fuerza de rozamiento como en el problema resuelto C descomponiendo las fuerzas en las direcciones paralela y perpendicular al plano inclinado. Así:

$$N - P_y = 0 \Rightarrow N = P_y = mg \cos \alpha \rightarrow$$

$$\rightarrow F_r = \mu N = \mu mg \cos \alpha$$

Calculamos el desplazamiento sobre el plano inclinado por trigonometría:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{h_f}{\Delta r} \rightarrow \Delta r = \frac{h_f}{\operatorname{sen} \alpha}$$

Sustituimos estos valores en la ecuación de la energía y despejamos y obtenemos la velocidad inicial:

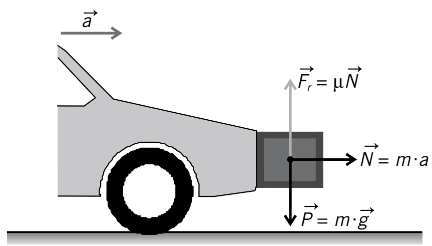
$$-\frac{1}{2}\cancel{m}v_0^2 + \cancel{m}gh_f = \mu \cancel{m} g \cos \alpha \frac{h_f}{\operatorname{sen} \alpha} \cos 180$$

$$-\frac{1}{2}v_0^2 = gh_f + \mu g \cos \alpha \frac{h_f}{\operatorname{sen} \alpha}(-1)$$

$$v_0^2 = 2gh_f\left(1 + \frac{\mu}{\operatorname{tg} \alpha}\right) = 2 \cdot 9{,}8 \cdot 4{,}0\left(1 + \frac{0{,}15}{\operatorname{tg} 30}\right) = 98{,}77$$

$$v_0 = \sqrt{98{,}77} = 9{,}9 \text{ m·s}^{-1}$$

5. El diagrama de fuerzas es el que muestra la figura:



Aplicamos la segunda ley de Newton en el eje horizontal:

$$N = m \cdot a$$

Y lo mismo en el eje vertical:

$$F_r - P = 0 \rightarrow F_r = P \rightarrow \mu N = m \cdot g$$

$$\mu \cancel{m} \cdot a = \cancel{m} \cdot g \rightarrow a = \frac{g}{\mu} = \frac{9{,}8}{0{,}7} = 14 \text{ m·s}^{-2}$$

6. En primer lugar, calculamos la velocidad con la que sale despedido el bloque de madera considerando que, en el impacto, el momento lineal permanece constante, pues no existe ninguna fuerza resultante externa en la dirección horizontal.

$$\vec{p}_0 = \vec{p} \rightarrow mv_0 = (m + M) \cdot v \rightarrow v = \frac{m}{m + M}v_0$$

$$v = \frac{0{,}100}{0{,}1 + 2{,}00} \cdot 100 = 4{,}76 \text{ m·s}^{-1}$$

Conocida la velocidad que lleva el bloque tras el impacto, aplicamos el teorema de las fuerzas vivas entre la posición inicial, en movimiento, y la posición final, detenido:

$$W_r = \Delta E_c \rightarrow F_r \cdot \Delta r \cdot \cos 180° = 0 - \frac{1}{2} \cdot (m + M) \cdot v^2$$

La expresión de la fuerza de rozamiento se halla teniendo en cuenta que, en el eje vertical, las únicas fuerzas que actúan son la normal y el peso.

$$N - P = 0 \rightarrow N = P = mg$$

$$F_r = \mu N = \mu mg$$

En el teorema de las fuerzas vivas sustituimos y despejamos el coeficiente de rozamiento:

$$\mu\,(\cancel{m + M})\,g\Delta r \cos 180° = -\frac{1}{2}(\cancel{m + M})v^2$$

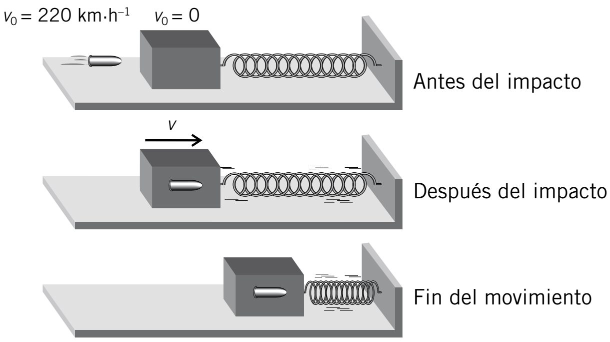
$$\mu = \frac{v^2}{2g\Delta r} = \frac{4{,}76^2}{2 \cdot 9{,}8 \cdot 5{,}0} = 0{,}23$$

7. Expresamos los datos del problema en unidades del SI:

$$m = 300 \text{ g} = 0{,}300 \text{ kg}$$

$$v_0 = 220 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} = 61{,}11 \text{ m·s}^{-1}$$

$$k = 770 \frac{\text{N}}{\text{cm}} \cdot \frac{100 \text{ cm}}{1 \text{ m}} = 7{,}7 \cdot 10^4 \text{ N·m}^{-1}$$



En primer lugar, calculamos la velocidad con la que sale despedido el bloque de madera sabiendo que, en el impacto, el momento lineal permanece constante al no existir ninguna fuerza resultante externa en la dirección horizontal:

$$\vec{p}_A = \vec{p}_B \rightarrow mv_A = (m+M)v_B \rightarrow v_B = \frac{m}{m+M}v_A$$

$$v = \frac{0{,}300}{0{,}300 + 4{,}00} \cdot 61{,}11 = 4{,}26 \text{ m·s}^{-1}$$

Conocida la velocidad que lleva el bloque tras el impacto, aplicamos el teorema de conservación de la energía mecánica entre las posiciones *B* y *C* de la figura y despejamos la deformación del muelle, *x:*

$$\Delta E_m = 0 \rightarrow E_{mB} = E_{mC} \rightarrow \frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}(m+M)v_B^2 = \frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}kx^2$$

$$x^2 = \frac{m+M}{k} \cdot v_B^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \sqrt{\frac{m+M}{k}} \cdot v_B = \sqrt{\frac{0{,}300 + 4{,}00}{7{,}7 \cdot 10^4}} \cdot 4{,}26 \rightarrow$$

$$\rightarrow x \simeq 0{,}03 \text{ m}$$

8. La bola de hierro se mueve en un tramo *AB* de caída vertical, seguido de un tramo *BC* en la arena hasta detenerse.

En primer lugar, aplicamos la conservación de la energía mecánica en el tramo *AB* a fin de hallar la velocidad con la que llega al suelo:

$$\Delta E_m = 0 \rightarrow E_{mA} = E_{mB} \rightarrow \cancel{m}gh = \frac{1}{2}\cancel{m}v^2$$

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot 11} = 14{,}68 \text{ m·s}^{-1}$$

En el tramo *BC,* consideramos la existencia de rozamiento en las transformaciones de energía y despejamos:

$$\Delta E_m = W_r \rightarrow E_{mC} - E_{mB} = F_r \cdot \Delta r \cdot \cos 180°$$

$$0 - \left(mg\Delta r + \frac{1}{2}mv^2\right) = F_r \cdot \Delta r(-1)$$

$$F_r = \frac{mg\Delta r + \frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}m(\cancel{2}gh)}{\Delta r} = mg\left(1 + \frac{h}{\Delta r}\right)$$

$$F_r = 2{,}0 \cdot 9{,}8\left(1 + \frac{11}{0{,}050}\right) \simeq 4{,}3 \cdot 10^3 \text{ N}$$

9. El movimiento del coche puede estudiarse a partir de las causas que lo producen (aplicando la segunda ley de Newton) o a partir de las transformaciones energéticas que tienen lugar. Este segundo planteamiento es más cómodo en este caso.

Sobre el coche actúa una fuerza de rozamiento que es no conservativa. Por tanto:

$$\Delta E_m = W_{\text{no cons.}} \rightarrow \Delta E_c + \Delta E_p = W_{\text{roz.}}$$

Como queremos que el coche ascienda con velocidad constante, la variación de la energía cinética es 0:

$$0 - mgh = F_r \cdot \Delta r \cdot \cos 180°$$

Hallamos la fuerza de rozamiento como en el problema resuelto *C* descomponiendo las fuerzas en las direcciones paralela y perpendicular al plano inclinado. Así:

$$N - P_y = 0 \rightarrow N = P_y = mg\cos\alpha \rightarrow$$

$$\rightarrow F_r = \mu N = \mu mg\cos\alpha$$

Calculamos el desplazamiento sobre el plano inclinado por trigonometría:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{h}{\Delta r} \rightarrow \Delta r = \frac{h}{\operatorname{sen}\alpha}$$

Sustituimos estos valores en la ecuación de la energía, despejamos y obtenemos el ángulo de inclinación:

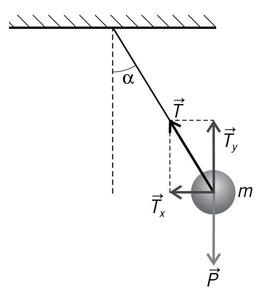
$$-\cancel{m}\,\cancel{g}\,\cancel{h} = \mu\,\cancel{m}\,\cancel{g}\cos\alpha\frac{\cancel{h}}{\operatorname{sen}\alpha}\cos 180°$$

$$\mu = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha \rightarrow \alpha = \operatorname{arctg}\mu = 4{,}57°$$

10. Expresamos la velocidad en unidades del SI:

$$v = 38\frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}} \cdot \frac{1\,000 \text{ m}}{1\ \cancel{\text{km}}} \cdot \frac{1\ \cancel{\text{h}}}{3\,600 \text{ s}} = 10{,}556 \text{ m·s}^{-1}$$

El diagrama de fuerzas es el que muestra la figura:



La resultante de las fuerzas que actúan sobre el objeto (tensión y peso) es la fuerza centrípeta responsable de la trayectoria circular del coche.

Para aplicar la segunda ley de Newton con comodidad, descomponemos la tensión:

$$T_x = T \cdot \operatorname{sen}\alpha$$
$$T_y = T \cdot \cos\alpha$$

Aplicamos la segunda ley de Newton en los ejes *X* e *Y:*

— Eje *X:* $T \cdot \operatorname{sen}\alpha = m \cdot a_c = m \cdot \dfrac{v^2}{R}$

— Eje *Y:* $T \cdot \cos\alpha - m \cdot g = 0 \rightarrow T \cdot \cos\alpha = m \cdot g$

Dividimos las dos ecuaciones, la del eje *Y* entre la del eje *X*, para que se cancele la tensión, despejamos y obtenemos *R*:

$$\frac{\cancel{T}\cdot\cos\alpha}{\cancel{T}\cdot\operatorname{sen}\alpha}=\frac{\cancel{m}\cdot g}{\cancel{m}\,v^2/R}\rightarrow$$

$$\rightarrow R=\frac{v^2}{g\cdot\operatorname{tg}\alpha}=\frac{10{,}556^2}{9{,}8\cdot\operatorname{tg}6°}\simeq 108\text{ m}$$

11. Expresamos los datos del problema en unidades del SI:

$$r=2{,}49\cdot 10^4\ \cancel{\text{km}}\cdot\frac{1000\text{ m}}{1\ \cancel{\text{km}}}=2{,}49\cdot 10^7\text{ m}$$

a) El momento angular puede expresarse en función del momento de inercia:

$$\vec{L}=I\vec{\omega}\rightarrow L=I\omega\rightarrow I=\frac{L}{\omega}=\frac{2{,}2\cdot 10^{12}\text{ kg·m}^2\text{·s}^{-1}}{1{,}45\cdot 10^{-4}\text{ rad·s}^{-1}}$$

$$I=1{,}52\cdot 10^{16}\text{ kg·m}^2$$

b) La definición del momento angular nos permite despejar y calcular la masa del satélite:

$$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times m\vec{v}=\vec{r}\times m\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right)\rightarrow L=mr^2\omega\operatorname{sen}90°$$

$$m=\frac{L}{r^2\omega}=\frac{2{,}20\cdot 10^{12}\text{ kg·m}^2\text{·s}^{-1}}{(2{,}49\cdot 10^7\text{ m})^2\cdot 1{,}45\cdot 10^{-4}\text{ rad·s}^{-1}}\approx 24{,}5\text{ kg}$$

Ejercicios y problemas (Págs. 53 a 56)

1 CINEMÁTICA Págs. 53 y 54

12. Para que la definición sea correcta, hay que aclarar que se trata de la velocidad media.

13. Expresamos las magnitudes del problema en unidades del SI:

$$v=50\frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}}\cdot\frac{1000\text{ m}}{1\ \cancel{\text{km}}}\cdot\frac{1\ \cancel{\text{h}}}{3600\text{ s}}=13{,}89\text{ m·s}^{-1}$$

$$d_1=86\ \cancel{\text{cm}}\cdot\frac{1\text{ m}}{100\ \cancel{\text{cm}}}=0{,}86\text{ m}\rightarrow r_1=\frac{d_1}{2}=0{,}43\text{ m}$$

$$d_2=19\ \cancel{\text{dm}}\cdot\frac{1\text{ m}}{10\ \cancel{\text{dm}}}=1{,}9\text{ m}\rightarrow r_2=\frac{d_2}{2}=0{,}95\text{ m}$$

a) El tractor efectúa un MRU. Utilizamos la ecuación del movimiento para determinar la distancia que recorre.

$$x=x_0+v\cdot(t-t_0)\rightarrow x=13{,}89\cdot 44=611{,}16\text{ m}$$

$$x\approx 6{,}1\cdot 10^{-2}\text{ m}$$

Las ruedas delanteras han recorrido la misma distancia, pero con MCU. Por tanto, en cada vuelta recorren la longitud de su circunferencia.

$$s=2\pi r_1=2\pi\cdot 0{,}43=2{,}70\text{ m}$$

Hallamos el número de vueltas que han dado las ruedas delanteras dividiendo la distancia total entre la distancia de una vuelta. Así:

$$n=\frac{611{,}11}{2{,}70}\approx 226\text{ vueltas}$$

b) Calculamos la velocidad angular de las ruedas traseras por su relación con el módulo de la velocidad lineal:

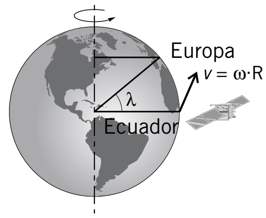
$$v=\omega\cdot r\rightarrow\omega=\frac{v}{r}=\frac{13{,}89}{0{,}95}\approx 15\text{ rad·s}^{-1}$$

14. Para colocar un satélite en órbita alrededor de la Tierra, es necesario imprimirle una gran velocidad tangencial. De esto se encarga el sistema de propulsión del cohete. Todo lo que reduzca las necesidades del sistema del cohete es una aportación bienvenida.

La superficie terrestre ya viaja hacia el este debido a la rotación de la Tierra. Por tanto, si los cohetes se lanzan hacia el este, la rotación del planeta proporciona cierta velocidad tangencial inicial que reduce las necesidades del cohete.

Esta velocidad tangencial que aporta la rotación terrestre se relaciona con su velocidad angular: $v=\omega\cdot R$.

La diferencia entre lanzar los cohetes desde Europa o desde el ecuador está en la diferente distancia, *r*, desde estos lugares hasta el eje de rotación de la Tierra, como puede verse en la figura:



La Agencia Espacial Europea explica en su página web esta y otras razones geográficas y demográficas.

15. Dato:

Vector posición: $\vec{r}(t)=\left(2t^2-7\right)\vec{i}+\left(\frac{3}{2}t^2+14\right)\vec{j}$ (SI)

a) La ecuación de la trayectoria se determina eliminando el tiempo; en este ejercicio, resulta más conveniente despejar t^2 en lugar de *t*.

$$x=2t^2-7\rightarrow t^2=\frac{x+7}{2}$$

Y sustituyendo en la segunda ecuación paramétrica:

$$y=\frac{3}{2}t^2+14\rightarrow y=\frac{3}{2}\left(\frac{x+7}{2}\right)+14\rightarrow$$

$$\rightarrow y=\frac{3}{4}x+\frac{77}{4}$$

Esta ecuación de la trayectoria corresponde a una línea recta.

b) La velocidad media es el cociente entre el vector desplazamiento y el tiempo transcurrido. Nos piden su valor durante el tercer segundo de movimiento, lo que quiere decir que tenemos que calcularla entre $t=2$ s y $t=3$ s.

$$\vec{v}_m=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{\vec{r}(t=3)-\vec{r}(t=2)}{3-2}=\frac{\left(11\vec{i}+\frac{55}{2}\vec{j}\right)-(\vec{i}+20\vec{j})}{1}$$

$$v_m=\left(10\vec{i}+\frac{15}{2}\vec{j}\right)\text{ m·s}^{-1}$$

c) La derivada del vector posición es el vector velocidad:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 4t\,\vec{i} + 3t\,\vec{j} \text{ m·s}^{-1}$$

La derivada del vector velocidad es la velocidad instantánea:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 4\vec{i} + 3\vec{j} \text{ m·s}^{-2}$$

d) La componente tangencial de la aceleración es la derivada del módulo del vector velocidad.

El módulo del vector velocidad es:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{t^2(4^2 + 3^2)} = 5t \text{ m·s}^{-1}$$

Y derivando, se obtiene la aceleración tangencial:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = 5 \text{ m·s}^{-2}$$

Como la trayectoria es una línea recta, el radio de curvatura es infinito y la aceleración normal, nula.

16. En primer lugar, hallamos las ecuaciones de la trayectoria de cada bicicleta:

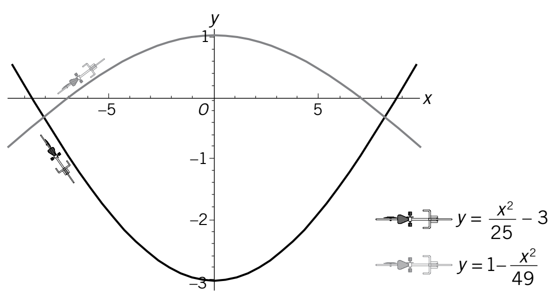
$$x_A = 5t \rightarrow t = \frac{x_A}{5}$$

$$y_A = t^2 - 3 \rightarrow y_A = \frac{x_A^2}{25} - 3$$

$$x_B = 7t \rightarrow t = \frac{x_B}{7}$$

$$y_B = 1 - t^2 \rightarrow y_B = 1 - \frac{x_B^2}{49}$$

Representamos las dos trayectorias en los mismos ejes coordenados.



Como las trayectorias se cruzan, hay algún punto que pertenece a las dos curvas. Para hallar sus coordenadas, igualamos las ecuaciones de las trayectorias y resolvemos:

$$1 - \frac{x^2}{49} = \frac{x^2}{25} - 3 \rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{x^2}{49} = 3 + 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{49x^2 + 25x^2}{25 \cdot 49} = 4$$

$$74x^2 = 4 \cdot 25 \cdot 49 \rightarrow x^2 = \frac{4\,900}{74} \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \sqrt{\frac{4\,900}{74}} = \pm\frac{35\sqrt{74}}{37}$$

$$y = 1 - \frac{x^2}{49} = 1 - \frac{4\,900/74}{49} = -\frac{13}{37} \rightarrow$$

$$\rightarrow P\left(\pm\frac{35\sqrt{74}}{37}, -\frac{13}{37}\right)$$

La distancia entre el observador, situado en el origen de coordenadas, y P es:

$$d(P,O) = \sqrt{P_x^2 + P_y^2} = \sqrt{\frac{35^2 \cdot 74}{37^2} + \frac{13^2}{37^2}} = \frac{\sqrt{90\,819}}{37}$$

$$d \approx 8{,}1 \text{ m}$$

17. Dato:

Ecuaciones paramétricas: $x = 1 + t$; $y = 2 - t^2$ (SI)

a) Se trata de la composición de dos movimientos: MRU en el eje X y MRUA en el eje Y. La combinación de ambos movimientos da como resultado una trayectoria parabólica.

b) Obtenemos el vector velocidad como la derivada del vector posición y el vector aceleración como la derivada del vector velocidad:

$$\vec{r} = (1 + t)\vec{i} + (2 - t^2)\vec{j} \text{ m}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (\vec{i} - 2t\,\vec{j}) \text{ m·s}^{-1}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -2\vec{j} \text{ m·s}^{-2}$$

El módulo del vector velocidad es:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{1 + 4t^2} \text{ m·s}^{-1}$$

Y el módulo de la aceleración:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(-2)^2} = 2 \text{ m·s}^{-2}$$

c) La aceleración tangencial es la componente de la aceleración que indica la variación del módulo de la velocidad con el tiempo. La componente normal señalaría el cambio de dirección.

En el apartado b) hemos calculado el módulo de la velocidad y hemos visto que varía con el tiempo. Por tanto, existe aceleración tangencial.

18. El hombre describe un MRU y su ecuación de movimiento es:

$$x = x_0 + v \cdot t \rightarrow x_H = 6t$$

El autobús describe un MRUA de ecuación. Veamos:

$$x = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \rightarrow x_A = 10 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}5 \cdot t^2$$

a) Cuando el hombre alcanza al autobús:

$$x_H = x_A \rightarrow 6t = 10 + 0{,}25t^2 \rightarrow 0{,}25t^2 - 6t + 10 = 0$$

La ecuación de segundo grado para el tiempo tiene dos soluciones:

$$t = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 10}}{0{,}5} = 12 \pm \frac{\sqrt{26}}{0{,}5} \rightarrow \begin{cases} t_1 = 1{,}8 \text{ s} \\ t_2 = 22{,}2 \text{ s} \end{cases}$$

Buscamos la solución en la que el tiempo es menor, puesto que corresponde a la posición en la que el hombre alcanza el autobús por primera vez.

Utilizamos ese valor del tiempo para hallar la posición en la que ambos se encuentran:

$$x_H = 6 \cdot 1{,}8 = 10{,}8 \text{ m} \approx 11 \text{ m}$$

Podemos comprobar que el problema está bien resuelto calculando la posición del autobús y verificando que se obtiene el mismo resultado:

$$x_A = 10 + 0{,}25 \cdot 1{,}8^2 = 10{,}81 \text{ m} \approx 11 \text{ m}$$

b) El tiempo que tarda el hombre en alcanzar el autobús lo hemos hallado en el proceso de cálculo del apartado a), y es:

$$t = 1{,}8 \text{ s}$$

19. Expresamos la velocidad de la moto en unidades del SI:

$$v = 36\,\frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}} \cdot \frac{1000 \text{ m}}{1\,\cancel{\text{km}}} \cdot \frac{1\,\cancel{\text{h}}}{3600 \text{ s}} = 10 \text{ m·s}^{-1}$$

La moto describe un MRU y su ecuación de movimiento es:

$$x = x_0 + v \cdot t \rightarrow x_M = 10t$$

El coche describe un MRUA de ecuación:

$$x = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \rightarrow x_C = \frac{1}{2} \cdot 0{,}3 \cdot t^2$$

a) Cuando el coche alcanza a la moto:

$$x_M = x_C \rightarrow 10t = 0{,}15t^2 \rightarrow 0{,}15t^2 - 10t = 0$$

La ecuación de segundo grado para el tiempo tiene dos soluciones:

$$t\,(0{,}15t - 10) = 0 \rightarrow \begin{cases} t_1 = 0 \text{ s} \\ t_2 = \dfrac{10}{0{,}15} \approx 67 \text{ s} \end{cases}$$

La primera solución indica que, en el instante inicial, el coche y la moto estaban en la misma posición. Por tanto, el ejercicio requiere la segunda solución: cuando el coche alcanza la moto.

b) Utilizamos el valor del tiempo hallado en el apartado a) para sustituir en la ecuación de la velocidad del MRUA:

$$v = v_0 + a \cdot t = 0{,}3 \cdot \frac{10}{0{,}15} = 20 \text{ m·s}^{-1}$$

20. Expresamos la velocidad en unidades del SI:

$$v = 108\,\frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}} \cdot \frac{1000 \text{ m}}{1\,\cancel{\text{km}}} \cdot \frac{1\,\cancel{\text{h}}}{3600 \text{ s}} = 30 \text{ m·s}^{-1}$$

La distancia de seguridad es la suma de la distancia recorrida durante el tiempo de reacción (MRU a 30 m/s) y la distancia recorrida durante el tiempo de frenado (MRUA).

Calculamos el tiempo de frenado:

$$v = v_0 + a\Delta t \rightarrow \Delta t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{-30}{-8} = 3{,}75 \text{ s}$$

La distancia recorrida es:

$$s = v_0 \cdot t_{\text{reacción}} + v_0 \cdot t_{\text{frenado}} + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2_{\text{frenado}}$$

$$s = 30 \cdot 0{,}5 + 30 \cdot 3{,}75 + \frac{1}{2} \cdot (-8) \cdot 3{,}75^2 \approx 70 \text{ m}$$

21. Ambas piedras describen un MRUA en dirección vertical.

Escribimos las ecuaciones de movimiento de las piedras eligiendo como origen de tiempos el lanzamiento de la primera piedra (piedra *A*):

$$y = y_0 + v_0(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} y_A = 20 + 25t - 4{,}9t^2 \\ y_B = 30(t - 1) - 4{,}9\,(t - 1)^2 \end{cases}$$

a) Cuando las piedras se encuentran:

$$y_A = y_B \rightarrow 20 + 25t - 4{,}9t^2 =$$
$$= 30t - 30 - 4{,}9\,(t^2 - 2t + 1)$$

Operamos y resolvemos la ecuación del siguiente modo:

$$20 + 25t - \cancel{4{,}9t^2} = 30t - 30 - \cancel{4{,}9t^2} + 9{,}8t - 4{,}9$$
$$25t - 30t - 9{,}8t = -30 - 4{,}9 - 20$$
$$-14{,}8t = -54{,}9$$
$$t = \frac{54{,}9}{14{,}8} = 3{,}7 \text{ s}$$

Tardan en encontrarse 3,7 s desde el lanzamiento de la primera piedra y 2,7 s desde el lanzamiento de la segunda.

b) Utilizamos el valor del tiempo calculado en el apartado a) para hallar la altura a la que se produce el encuentro:

$$y_A = 20 + 25 \cdot 3{,}7 - 4{,}9 \cdot 3{,}7^2 \approx 45 \text{ m}$$

Podemos comprobar que el problema está bien resuelto determinando la altura de la segunda piedra y comprobando que se obtiene el mismo resultado:

$$y_B = 30 \cdot 2{,}7 - 4{,}9 \cdot 2{,}7^2 \approx 45 \text{ m}$$

c) Utilizamos el valor del tiempo hallado en el apartado a) para sustituir en la ecuación de la velocidad del MRUA para cada piedra:

$$v = v_0 - g \cdot t \rightarrow \begin{cases} v_A = 25 - 9{,}8 \cdot 3{,}7 \approx -11 \text{ m·s}^{-1} \\ v_B = 30 - 9{,}8 \cdot 2{,}7 \approx 3{,}5 \text{ m·s}^{-1} \end{cases}$$

La velocidad de la piedra *A* es negativa porque ambas se encuentran cuando está descendiendo, mientras que la piedra *B* está aún ascendiendo.

22. Expresamos la velocidad en unidades del SI:

$$v = 12{,}0\,\frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}} \cdot \frac{1000 \text{ m}}{1\,\cancel{\text{km}}} \cdot \frac{1\,\cancel{\text{h}}}{3600 \text{ s}} = \frac{10}{3} = 3{,}33 \text{ m·s}^{-1}$$

La maceta realiza un movimiento de caída vertical y su ecuación de movimiento es:

$$y = y_0 + v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \rightarrow y = 6 - 4{,}9t^2$$

Calculamos el tiempo que tarda en llegar a 1,75 m, la altura de la persona que corre por la acera:

$$1{,}75 = 6 - 4{,}9t^2 \rightarrow 4{,}9t^2 = 4{,}25 \rightarrow$$
$$\rightarrow t = \sqrt{\frac{4{,}25}{4{,}9}} = 0{,}93 \text{ s}$$

La persona que va por la acera efectúa un MRU y su ecuación de movimiento es:

$$x = x_0 + v \cdot t \rightarrow x = 4{,}5 - 3{,}33\,t$$

Determinamos el tiempo que tarda en llegar a la vertical de la maceta:

$$0 = 4{,}5 - 3{,}33\,t \rightarrow t = \frac{4{,}5}{3{,}33} = 0{,}375 \text{ s}$$

El hombre invierte menos tiempo en alcanzar la vertical de la maceta del que tarda la maceta en llegar a la altura de su cabeza. Por tanto, si sigue corriendo, la maceta no le cae en la cabeza.

23. Inicialmente, el saco lleva la velocidad del globo; pero, cuando se suelta, queda a merced de la gravedad y describe un MRUA cuya ecuación del movimiento es:

$$y = y_0 + v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \rightarrow y_s = 19 + 1{,}8t - 4{,}9t^2$$

El globo realiza un MRU cuya ecuación de movimiento es:

$$y = y_0 + v \cdot t \rightarrow y_G = 19 + 1{,}8\,t$$

Calculamos el tiempo que tarda el saco en llegar al suelo, donde la altura es nula:

$$0 = 19 + 1{,}8t - 4{,}9t^2$$

La ecuación de segundo grado para el tiempo tiene dos soluciones:

$$t = \frac{-1{,}8 \pm \sqrt{1{,}8^2 + 4 \cdot 19 \cdot 4{,}9}}{-9{,}8} = \frac{1{,}8 \pm \sqrt{375{,}64}}{9{,}8} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} t_1 = -1{,}79 \text{ s} \\ t_2 = 2{,}16 \text{ s} \end{cases}$$

La solución negativa no tiene sentido físico. Utilizamos la segunda solución para sustituir en la ecuación de movimiento del globo y determinar así su altura:

$$y_G = 19 + 1{,}8 \cdot 2{,}16 \approx 23 \text{ m}$$

24. Expresamos los datos del problema en unidades del SI:

$$\omega = 33 \frac{\cancel{\text{rev}}}{\cancel{\text{min}}} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \cancel{\text{rev}}} \cdot \frac{1 \cancel{\text{min}}}{60 \text{ s}} = 1{,}1\pi \text{ rad·s}^{-1}$$

$$d = 30 \cancel{\text{cm}} \cdot \frac{1 \text{ m}}{100 \cancel{\text{cm}}} = 0{,}3 \text{ m} \rightarrow r = \frac{d}{2} = 0{,}15 \text{ m}$$

a) El tocadiscos efectúa un MCU. Las moscas que están sobre él giran a la misma velocidad que el tocadiscos.

Hallamos la velocidad lineal de las moscas por su relación con la velocidad angular:

$$v = \omega \cdot r$$

La mosca que está en el borde tiene $r_1 = 0{,}15$ m y, por tanto, su velocidad lineal es:

$$v = 1{,}1\pi \cdot 0{,}15 = 0{,}518 \text{ m·s}^{-1}$$

La mosca que se encuentra a 5 cm del borde tiene $r_2 = 0{,}15 - 0{,}05 = 0{,}1$ m y, por tanto, su velocidad lineal es:

$$v = 1{,}1\pi \cdot 0{,}1 = 0{,}346 \text{ m·s}^{-1}$$

b) En el MCU el módulo de la velocidad es constante, pero su dirección varía. Así pues, la aceleración presente es la aceleración normal:

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r = (1{,}1\pi)^2 \cdot 0{,}15 \approx 1{,}8 \text{ m·s}^{-2}$$

c) El período y la frecuencia del movimiento se relacionan con la velocidad angular. Veamos:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \rightarrow T = \frac{2\pi}{1.1\pi} \approx 1{,}8 \text{ s}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1{,}1\pi}{2\pi} \approx 0{,}5 \text{ Hz}$$

d) Para hallar el número de vueltas que describe el tocadiscos en 4,5 min es más rápido utilizar el dato original en revoluciones (o vueltas) por minuto:

$$\text{n.° vueltas} = 33 \text{ vueltas} \cdot \cancel{\text{min}^{-1}} \cdot 4{,}5 \cancel{\text{min}} = 148{,}5 \text{ vueltas}$$

e) La distancia que recorre la mosca durante 4,5 min puede calcularse a partir de su velocidad lineal, determinada en el apartado a):

$$s = v \cdot t = 0{,}518 \text{ m} \cdot \cancel{\text{s}^{-1}} \cdot 4{,}5 \cancel{\text{min}} \cdot \frac{60 \cancel{\text{s}}}{1 \cancel{\text{min}}} \approx 140 \text{ m}$$

25. Los dos ciclistas realizan sendos MCU. Sus velocidades angulares se calculan a partir de las lineales. Así:

$$v = \omega \cdot r \rightarrow \omega = \frac{v}{r} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} \omega_A = \dfrac{v_A}{r_A} = \dfrac{v_A}{d/2} = \dfrac{15}{50} = 0{,}3 \text{ rad·s}^{-1} \\ \omega_B = \dfrac{v_B}{r_B} = \dfrac{v_B}{d/2} = \dfrac{-12{,}5}{50} = -0{,}25 \text{ rad·s}^{-1} \end{cases}$$

Las ecuaciones del movimiento son:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega \cdot t \rightarrow \begin{cases} \varphi_A = 0{,}3t \\ \varphi_B = -0{,}25t \end{cases}$$

Cuando se encuentran, las distancias angulares recorridas entre los dos suman una vuelta: $\varphi_A - \varphi_B = 2\pi$ rad (hay que tener en cuenta que el segundo ciclista efectúa su recorrido en el sentido de las agujas del reloj; por eso, su posición angular es negativa). Sustituimos en esta relación y despejamos el tiempo:

$$0{,}3t + 0{,}25t = 2\pi \rightarrow 0{,}55t = 2\pi \rightarrow t = \frac{2\pi}{0{,}55} \approx 11{,}4 \text{ s}$$

La posición angular en la que se hallan, determinada a partir del ciclista que circula en sentido positivo, es:

$$\varphi = 0{,}3 \cdot 11{,}42 = 3{,}43 \text{ rad}$$

26. Expresamos los datos del problema en unidades del SI:

$$r = 50 \cancel{\text{cm}} \cdot \frac{1 \text{ m}}{100 \cancel{\text{cm}}} = 0{,}5 \text{ m}$$

$$\omega_0 = 23 \frac{\cancel{\text{rev}}}{\cancel{\text{min}}} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \cancel{\text{rev}}} \cdot \frac{1 \cancel{\text{min}}}{60 \text{ s}} = 0{,}767\pi \text{ rad·s}^{-1}$$

$$\varphi = 2{,}7 \text{ vueltas} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \cancel{\text{vuelta}}} = 5{,}4\pi \text{ rad}$$

La rueda realiza un MCUA, y sus ecuaciones del movimiento son:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0\, t + \frac{1}{2}\alpha\, t^2 \rightarrow \varphi = 0{,}767\pi \cdot t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \rightarrow \omega = 0{,}767\pi + \alpha \cdot t$$

a) Sustituimos en la ecuación de la velocidad angular y despejamos el tiempo que tarda en detenerse:

$$0 = 0{,}767\pi + \alpha t \rightarrow t = \frac{-0{,}767\pi}{\alpha}$$

Sustituimos este valor en la ecuación de la posición y calculamos la aceleración angular.

$$5{,}4\pi = 0{,}767\pi \cdot \frac{-0{,}767\pi}{\alpha} + \frac{1}{2}\alpha\left(\frac{-0{,}767\pi}{\alpha}\right)^2$$

$$5{,}4\cancel{\pi} = -\frac{0{,}588\pi\cancel{^2}}{\alpha} + \frac{0{,}294\pi\cancel{^2}}{\alpha}$$

$$5{,}4\alpha = -0{,}294\pi \rightarrow \alpha = \frac{-0{,}294\pi}{5{,}4} = -0{,}054\pi$$

$$\alpha \approx -0{,}17 \text{ rad·s}^{-2}$$

La aceleración tangencial se relaciona con la angular a través del radio:

$$a_t = \alpha \cdot r = -0{,}171 \cdot 0{,}5 \approx -0{,}09 \text{ m·s}^{-2}$$

b) Sustituimos el valor de la aceleración angular en la expresión para el tiempo que hallamos en el apartado a):

$$t = \frac{-0{,}767\pi}{\alpha} = \frac{-0{,}767\cancel{\pi}}{-0{,}054\cancel{\pi}} \approx 14{,}19 \text{ s}$$

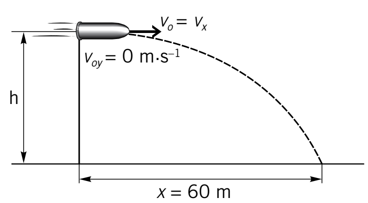
c) Calculamos la velocidad angular a los 2 s, sustituyendo en la ecuación de la velocidad:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t = 0{,}767\pi - 0{,}054\pi \cdot 2 \approx 2{,}07 \text{ rad·s}^{-1}$$

Y determinamos la velocidad lineal a los 2 s por su relación con la velocidad angular:

$$v = \omega \cdot r = 2{,}067 \cdot 0{,}5 \approx 1{,}03 \text{ m·s}^{-1}$$

27. El proyectil describe un movimiento parabólico, en dos dimensiones, resultante de combinar un MRU en el eje *X* y un MRUA (caída libre) en el eje *Y*.



a) Calculamos la altura desde la que cae sustituyendo en la ecuación de movimiento en el eje *Y:*

$$y = y_0 + v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \rightarrow 0 = y_0 - 4{,}9 \cdot 3^2$$

$$y_0 = 4{,}9 \cdot 9 \approx 44 \text{ m}$$

b) Despejamos en la ecuación del movimiento en el eje *X* para obtener la velocidad horizontal inicial:

$$x = v_x \cdot t \rightarrow 60 = v_0 \cdot 3 \rightarrow v_0 = \frac{60}{3} = 20 \text{ m·s}^{-1}$$

c) La ecuación de la trayectoria se obtiene a partir de las ecuaciones paramétricas de los movimientos en cada eje:

$$x = 20t \rightarrow t = \frac{x}{20}$$

$$y = 44{,}1 - 4{,}9t^2 = 44{,}1 - 4{,}9 \cdot \left(\frac{x}{20}\right)^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow y = 44{,}1 - 0{,}012x^2$$

d) El vector velocidad con el que llega el proyectil al suelo se obtiene sustituyendo en las ecuaciones de la velocidad correspondientes a los movimientos en cada eje:

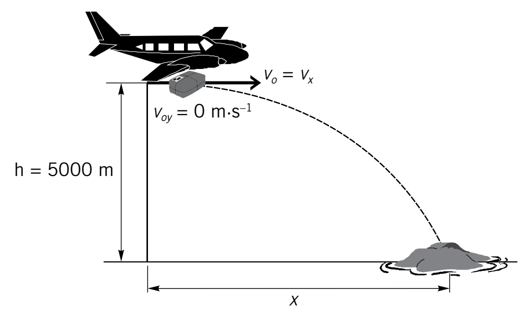
$$\left.\begin{aligned} v_x &= 20 \text{ m·s}^{-1} \\ v_y &= -gt = -9{,}8 \cdot 3 = -29{,}4 \text{ m·s}^{-1} \end{aligned}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{v} = (20\vec{i} - 29{,}4\vec{j}) \text{ m·s}^{-1}$$

28. Expresamos la velocidad en unidades del SI:

$$v = 720{,}0 \frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}} \cdot \frac{1000 \text{ m}}{1 \cancel{\text{km}}} \cdot \frac{1 \cancel{\text{h}}}{3600 \text{ s}} = 200 \text{ m·s}^{-1}$$

a) El paquete describe un movimiento parabólico, en dos dimensiones, resultante de combinar un MRU en el eje *X* y un MRUA (caída libre) en el eje *Y.*



El vector posición reúne las ecuaciones de movimiento de los dos ejes. Veamos:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + v_x t \\ y &= y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} x &= 200t \\ y &= 5\,000 - 4{,}9t^2 \end{aligned}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{r}(t) = \left[200t\vec{i} + (5\,000 - 4{,}9t^2)\vec{j}\right] \text{ m}$$

b) Calculamos el tiempo de vuelo del paquete a partir de la ecuación de movimiento en el eje *Y:*

$$y = 5\,000 - 4{,}9t^2 \rightarrow 0 = 5\,000 - 4{,}9\,t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{5\,000}{4{,}9}} = 31{,}944 \text{ s}$$

La distancia horizontal recorrida durante ese tiempo es:

$$x = v_x \cdot t = 200 \cdot 31{,}944 \approx 6\,389 \text{ m}$$

c) Derivamos el vector posición del paquete para hallar el vector velocidad. Así:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = 200\vec{i} - 9{,}8t\vec{j}$$

Sustituimos por el tiempo de vuelo:

$$\vec{v}(t = 31{,}9 \text{ s}) = 200\vec{i} - 9{,}8 \cdot 31{,}9\vec{j} = (200\vec{i} - 313\vec{j}) \text{ m·s}^{-1}$$

29. Respuesta sugerida:

Los alumnos utilizarán el simulador para seguir las trayectorias de los proyectiles. En primer lugar, sin tener en cuenta la resistencia del aire, variando el ángulo de lanzamiento y dejando constantes las otras magnitudes.

Los valores que permiten observar correctamente las trayectorias en la pantalla son estos:

— Ángulo: desde 5º hasta 85º, variando de 5º en 5º.

— Velocidad inicial: 15 $m \cdot s^{-1}$.

— Masa y diámetro: cualquier valor (no influye).

El grupo clase debe concluir que, conforme aumenta el ángulo, lo hacen también la altura máxima y el alcance del proyectil. Este último toma su valor máximo cuando el ángulo es de 45º. A partir de ahí, el alcance va disminuyendo y la altura máxima continúa aumentando.

Puede hacerse un análisis gráfico anotando los resultados que da el simulador para estas dos magnitudes y representarlas en ejes cartesianos frente al ángulo de lanzamiento.

Asimismo, puede estudiarse analíticamente manipulando las ecuaciones del movimiento para escribir la altura máxima y el alcance como funciones del ángulo de lanzamiento. A continuación, estas expresiones pueden representarse como funciones, e incluso pueden calcularse sus valores extremos.

Para comprobar la resistencia del aire, se aconseja utilizar el simulador con un valor algo elevado del coeficiente de arrastre (por ejemplo, 0,8) y efectuar disparos para varios ángulos, con y sin resistencia. En todos los casos, se comprobará que la resistencia del aire se opone al movimiento del proyectil, haciendo que tanto la altura máxima como el alcance disminuyan.

Además, en este caso la oposición del aire sí depende de la masa del objeto. Para comprobar este punto, se deben efectuar disparos para un mismo ángulo de lanzamiento utilizando los diversos objetos que propone el simulador, cada uno con diferente masa y tamaño.

30. La manzana describe un movimiento de caída libre. Parte de la posición *A* a la altura *h,* pasa por la posición *B* a una altura que queremos determinar y alcanza el suelo en la posición *C*.

Como conocemos la relación entre las velocidades en las posiciones *B* y *C*, $v_B = \frac{v_C}{2}$, la usamos para encontrar una relación entre el tiempo que tarda la manzana en alcanzar la posición *B* (t_B) y el tiempo que tarda en caer al suelo (t_C).

Aplicamos la ecuación de la velocidad:

$$v = v_0 - g\,t \rightarrow \begin{cases} A \rightarrow B\text{: } v_B = -g\,t_B \\ A \rightarrow C\text{: } v_C = -g\,t_C \end{cases}$$

$$v_B = \frac{v_C}{2} \rightarrow \cancel{-g}\,t_B = \frac{\cancel{-g}\,t_C}{2} \rightarrow 2\,t_B = t_C$$

Utilizamos la relación entre los tiempos en las ecuaciones del movimiento. Así:

$$y = y_0 - \frac{1}{2}gt^2 \rightarrow \begin{cases} A \rightarrow B\text{: } y_B = h - \frac{1}{2}g\,t_B^2 \\ A \rightarrow C\text{: } 0 = h - \frac{1}{2}g\,t_C^2 \end{cases}$$

Sustituimos en la ecuación $A \rightarrow C$ y despejamos otra expresión para el tiempo, esta vez en función de la altura inicial:

$$0 = h - \frac{1}{2}g\,t_C^2 \rightarrow 0 = h - \frac{1}{2}g(2\,t_B)^2 \rightarrow 2gt_B^2 = h \rightarrow$$

$$\rightarrow t_B^2 = \frac{h}{2g}$$

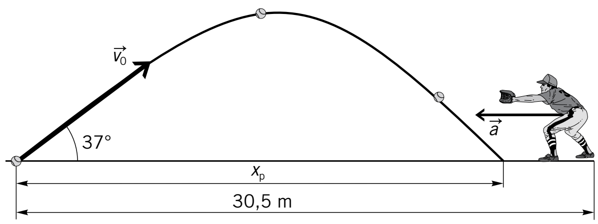
Sustituimos esta relación en la ecuación de $A \rightarrow B$:

$$y_B = h - \frac{1}{2}g\,t_B{}^2 \rightarrow y_B = h - \frac{1}{2}\cancel{g}\left(\frac{h}{2\cancel{g}}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow y_B = h - \frac{h}{4} = \frac{3h}{4}$$

31. La pelota describe un movimiento parabólico, en dos dimensiones, resultante de combinar un MRU en el eje *X* y un MRUA (lanzamiento vertical) en el eje *Y:*

Durante el tiempo de vuelo de la pelota, el jugador describe un MRUA.



Calculamos el tiempo de vuelo de la pelota utilizando la ecuación del movimiento en el eje *Y.*

$$y = y_0 + v_0\,\text{sen}\,\alpha \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow 0 = 14{,}5 \cdot \text{sen } 37° \cdot t - 4{,}9\,t^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow 0 = 8{,}726\,t - 4{,}9\,t^2$$

La ecuación de segundo grado para el tiempo tiene dos soluciones:

$$t(8{,}726 - 4{,}9t) = 0 \rightarrow \begin{cases} t_1 = 0 \text{ s} \\ t_2 = \frac{8{,}726}{4{,}9} = 1{,}78 \text{ s} \end{cases}$$

La primera solución indica que el movimiento de la pelota parte del suelo. Por tanto, el ejercicio requiere la segunda solución, que es cuando el segundo jugador debe llegar a coger la pelota.

La distancia horizontal recorrida por la pelota durante ese tiempo es:

$$x_p = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t = 14{,}5 \cdot \cos 37° \cdot 1{,}78 = 20{,}62 \text{ m}$$

Sustituimos en la ecuación del MRUA del jugador para hallar la aceleración con la que debe correr para coger la pelota. Tenemos en cuenta que el punto de referencia para las posiciones es el lanzador; así pues, la posición inicial del segundo corredor es de 30,5 m y su posición final debe ser de 20,62 m.

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \rightarrow 20{,}62 = 30{,}5 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot 1{,}78^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow 20{,}62 - 30{,}5 = 1{,}586a \rightarrow a = \frac{-9{,}88}{1{,}586} = -6{,}23 \text{ m·s}^{-2}$$

2 DINÁMICA Págs. 54 y 55

32. a) La fuerza que actúa sobre un cuerpo lleva la misma dirección que la aceleración que le imprime, pero la dirección o el sentido del movimiento del cuerpo pueden ser diferentes.

Por ejemplo, en un movimiento circular, la fuerza que actúa sobre el cuerpo es radial y lleva siempre dirección perpendicular al movimiento.

O en un movimiento de frenada, la dirección del movimiento y la fuerza coinciden, pero los sentidos son opuestos.

b) La clave de esta situación es que, para trepar por la cuerda, ha de haber una fuerza que lleve dirección ascendente, y esta fuerza tiene que realizarse sobre la persona que trepa. Pero la persona no puede ejercer una fuerza sobre sí misma, sino que la efectúa sobre la cuerda. De ahí que deba tirar de la cuerda hacia abajo para que la fuerza de reacción de la cuerda sobre la persona, de la misma magnitud pero de sentido contrario (tercera ley de Newton), vaya dirigida hacia arriba.

c) En un choque entre objetos no puntuales, como los vehículos, la dirección de la velocidad cambia en un intervalo de tiempo muy corto. Cuando el choque es frontal, el sentido de la velocidad se invierte en el choque y, por tanto, el cambio en el momento lineal es el máximo posible. Dado que se cumple $\vec{I} = \vec{F} \cdot \Delta t = \Delta\vec{p}$, si la variación del momento lineal es la máxima posible cuando el choque es frontal, también lo es la fuerza que se percibe en el impacto, lo que convierte los choques frontales en muy peligrosos, más que los laterales.

d) Cuanto más se aprieta una palma de la mano contra la otra, la fuerza entre ellas es mayor y, en consecuencia, también lo es la fuerza de reacción normal a la superficie de las manos. Como la fuerza de rozamiento es proporcional a esta fuerza normal, es también mayor y, por tanto, hay que ejercer más fuerza para superarla y deslizar y separar las manos.

33. Cuando un objeto se coloca sobre una balanza, por la tercera ley de Newton, la balanza realiza una fuerza de reacción (fuerza normal, N) sobre el cuerpo. Las balanzas están calibradas para el reposo, cuando el peso y la normal son las únicas fuerzas presentes. Por tanto, la lectura de una balanza en kilogramos es el valor de la fuerza normal dividida entre la gravedad.

a) Cuando el ascensor inicia un movimiento de ascenso con aceleración constante, por la segunda ley de Newton:

$$N - P = m \cdot a \rightarrow N = P + m \cdot a \rightarrow N = m \cdot g + m \cdot a \rightarrow$$
$$\rightarrow N = m \cdot (g + a) = 80 \cdot (9{,}8 + 4) = 1104 \text{ N}$$

La lectura de la balanza es la siguiente:

$$m_{\text{balanza}} = \frac{N}{g} = \frac{1104}{9{,}8} \approx 113 \text{ kg}$$

b) Cuando el ascensor se mueve con velocidad constante, si aplicamos la segunda ley de Newton tenemos que:

$$N - P = 0 \rightarrow N = P \rightarrow N = m \cdot g \rightarrow$$
$$\rightarrow N = 80 \cdot 9{,}8 = 784 \text{ N}$$

La lectura de la balanza es:

$$m_{\text{balanza}} = \frac{N}{g} = \frac{m \cdot \cancel{g}}{\cancel{g}} = 80 \text{ kg}$$

c) Cuando el ascensor detiene su ascenso con aceleración constante, por la segunda ley de Newton:

$$P - N = m \cdot a \rightarrow N = P - m \cdot a \rightarrow N = m \cdot g - m \cdot a \rightarrow$$
$$\rightarrow N = m \cdot (g - a) = 80 \cdot (9{,}8 - 4) = 464 \text{ N}$$

La lectura de la balanza es:

$$m_{\text{balanza}} = \frac{N}{g} = \frac{464}{9{,}8} \approx 47 \text{ kg}$$

34. Las dos bolas de plastilina sufren un choque inelástico. En el impacto, el momento lineal permanece constante al no existir ninguna fuerza externa.

Expresamos las masas en unidades del SI:

$$m_1 = 40\,\cancel{g} \cdot \frac{1 \text{ kg}}{1000\,\cancel{g}} = 4 \cdot 10^{-2} \text{ kg}$$
$$m_2 = 60\,\cancel{g} \cdot \frac{1 \text{ kg}}{1000\,\cancel{g}} = 6 \cdot 10^{-2} \text{ kg}$$

Planteamos la conservación del vector momento lineal:

$$\vec{p}_0 = \vec{p} \rightarrow m_1\vec{v}_2 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v} \rightarrow$$
$$\rightarrow 4 \cdot \cancel{10^{-2}} \cdot 6\vec{i} + 6 \cdot \cancel{10^{-2}} \cdot (-4\vec{i}) = (4 \cdot \cancel{10^{-2}} + 6 \cdot \cancel{10^{-2}})\vec{v} \rightarrow$$
$$\rightarrow 24\vec{i} - 24\vec{i} = 10\vec{v} \rightarrow \vec{v} = 0$$

35. Expresamos la masa de la bala en unidades del SI:

$$m = 17\,\cancel{g} \cdot \frac{1 \text{ kg}}{1000\,\cancel{g}} = 1{,}7 \cdot 10^{-2} \text{ kg}$$

En el impacto de la bala en el saco de arena, el momento lineal permanece constante al no existir ninguna fuerza externa:

$$\vec{p}_0 = \vec{p} \rightarrow mv_0 = (m + M)v \rightarrow v_0 = \frac{m + M}{m} v$$
$$v_0 = \frac{1{,}7 \cdot 10^{-2} + 1{,}5}{1{,}7 \cdot 10^{-2}} \cdot 0{,}6 \approx 54 \text{ m·s}^{-1}$$

36. Expresamos la masa de la pelota en unidades del SI:

$$m = 100\,\cancel{g} \cdot \frac{1 \text{ kg}}{1000\,\cancel{g}} = 0{,}1 \text{ kg}$$

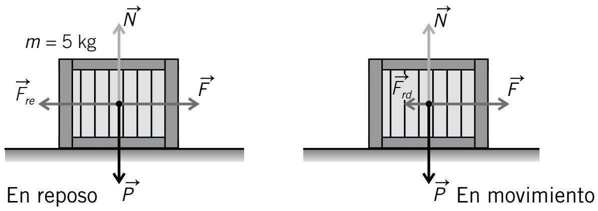
En el impacto de la raqueta sobre la pelota de tenis se cumple la segunda ley de Newton, que se puede expresar utilizando el impulso mecánico del siguiente modo:

$$\vec{I} = \vec{F} \cdot \Delta t = \Delta\vec{p} = \vec{p} - \vec{p}_0$$

Despejamos la fuerza y sustituimos:

$$\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \frac{m\vec{v} - m\vec{v}_0}{\Delta t} = \frac{m(\vec{v} - \vec{v}_0)}{\Delta t} \rightarrow$$
$$\rightarrow F = \frac{0{,}1 \cdot (50 - (-25))}{0{,}2} = 37{,}5 \text{ N}$$

37. El diagrama de fuerzas es el que muestra la figura.



Donde la fuerza de rozamiento es de rozamiento estático cuando el cuerpo está en reposo y de rozamiento dinámico cuando está en movimiento.

Aplicamos la segunda ley de Newton para calcular la fuerza mínima (que produce aceleración nula) necesaria para iniciar el movimiento:

$$F - F_{re} = 0 \rightarrow F = F_{re} = \mu_e \cdot N = \mu_e \cdot mg$$

$$F = 0{,}5 \cdot 5\text{ kg} \cdot 9{,}81\text{ m·s}^{-2} = 25\text{ N}$$

Una vez en movimiento, la fuerza de rozamiento es menor y, al mantener la misma fuerza, la garrafa se mueve con aceleración. Aplicamos la segunda ley de Newton para hallar esta aceleración:

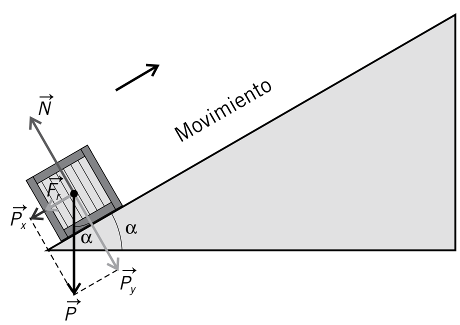
$$F - F_{rd} = m \cdot a \rightarrow \mu_e \cdot \cancel{m}g - \mu_d \cdot \cancel{m}g = \cancel{m}a$$
$$a = (\mu_e - \mu_d) \cdot g = (0{,}5 - 0{,}2) \cdot 9{,}8 = 2{,}94\text{ m·s}^{-2}$$

$$F - F_{rd} = m \cdot a \rightarrow \mu_e \cdot \cancel{m} \cdot g - \mu_d \cdot \cancel{m} \cdot g = \cancel{m} \cdot a$$
$$a = (\mu_e - \mu_d) \cdot g = (0{,}5 - 0{,}2) \cdot 9{,}8 = 2{,}94\text{ m·s}^{-2}$$

La garrafa describe un MRUA. Sustituimos en la ecuación de la velocidad para determinar su valor al cabo de 2 s:

$$v = v_0 + a \cdot t \rightarrow v = 2{,}94 \cdot 2 \approx 5{,}9\text{ m·s}^{-1}$$

38. El diagrama de fuerzas es el que muestra la figura:



La descomposición del peso de la caja es:

$$P_x = P \cdot \operatorname{sen}\alpha = mg \operatorname{sen}\alpha$$
$$P_y = P \cdot \cos\alpha = mg \cos\alpha$$

Aplicamos la segunda ley de Newton en el eje *Y:*

$$N - P_y = 0 \rightarrow N = P_y = mg\cos\alpha$$

Y lo mismo hacemos en el eje *X* para hallar la aceleración de la caja:

$$-F_r - P_x = m \cdot a \rightarrow -\mu \cancel{m} g \cos\alpha - \cancel{m} g \operatorname{sen}\alpha = \cancel{m} a$$
$$a = -0{,}15 \cdot 9{,}8 \cdot \cos 15° - 9{,}8 \cdot \operatorname{sen} 15° = -3{,}956\text{ m·s}^{-2}$$

Una vez conocida la aceleración, estudiamos el MRUA que describe la caja.

Determinamos, por trigonometría, la distancia que recorre hasta detenerse:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{h}{s} \rightarrow s = \frac{h}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{4\text{ m}}{\operatorname{sen}15°} = 15{,}455\text{ m}$$

Hallamos una expresión para el tiempo que el objeto está moviéndose a partir de la ecuación de la velocidad. Así:

$$v = v_0 + at \rightarrow 0 = v_0 - 3{,}96t \rightarrow t = \frac{v_0}{3{,}96}$$

Sustituimos esta expresión en la ecuación del movimiento, despejamos y calculamos la velocidad:

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \rightarrow$$
$$\rightarrow 15{,}5 = v_0 \cdot \frac{v_0}{3{,}96} + \frac{1}{2}(-\cancel{3{,}96})\frac{v_0^2}{3{,}96^{\cancel{2}}} \rightarrow$$
$$\rightarrow 15{,}5 \cdot 3{,}96 = v_0^2 - \frac{1}{2} v_0^2 \rightarrow$$
$$\rightarrow v_0 = \sqrt{2 \cdot 15{,}5 \cdot 3{,}96} \approx 11{,}06\text{ m·s}^{-1}$$

39. Expresamos las magnitudes del problema en unidades del SI:

$$m = 50{,}0\ \cancel{g} \cdot \frac{1\text{ kg}}{1000\ \cancel{g}} = 5{,}00 \cdot 10^{-2}\text{ kg}$$
$$s = 10\ \cancel{cm} \cdot \frac{1\text{ m}}{100\ \cancel{cm}} = 0{,}10\text{ m}$$

a) La bala describe un MRUA. Utilizamos la ecuación de la velocidad para despejar la aceleración durante la frenada:

$$v = v_0 + at \rightarrow a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{-200}{t}$$

Sustituimos en la ecuación del movimiento, despejamos y hallamos el tiempo:

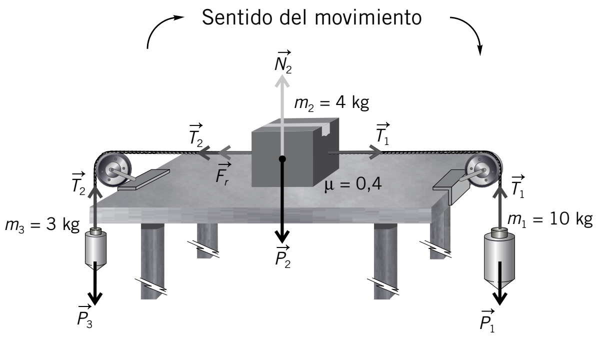
$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \rightarrow$$
$$\rightarrow 0{,}10 = 200t + \frac{1}{2}\frac{-200}{\cancel{t}} t^{\cancel{2}} \rightarrow$$
$$\rightarrow 0{,}10 = 200t - 100t \rightarrow 0{,}10 = 100t \rightarrow$$
$$\rightarrow t = \frac{0{,}10}{100} = 10^{-3}\text{ s}$$

b) Calculamos la fuerza que opone la pared sustituyendo en la segunda ley de Newton:

$$F = m \cdot a = 5 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{-200}{10^{-3}} = -10^4\text{ N}$$

Esta fuerza tiene signo negativo porque se opone al movimiento de la bala.

40. El diagrama de fuerzas es el que muestra la figura:



Aplicamos la segunda ley de Newton a cada cuerpo:

— Cuerpo 1: $P_1 - T_1 = m_1 \cdot a$

— Cuerpo 2: $T_1 - T_2 - F_r = m_2 \cdot a$

— Cuerpo 3: $T_2 - P_3 = m_3 \cdot a$

Sumamos las tres ecuaciones y despejamos la aceleración:

$$P_1 - P_3 - F_{r2} = (m_1 + m_2 + m_3) \cdot a$$

$$m_1\, g - m_3\, g - \mu\, m_2\, g = (m_1 + m_2 + m_3) \cdot a$$

$$a = \frac{(m_1 - m_3 - \mu\, m_2)g}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{(10 - 3 - 0{,}4 \cdot 4) \cdot 9{,}8}{10 + 4 + 3} \approx 3{,}1 \text{ m·s}^{-2}$$

Para calcular las tensiones de las dos cuerdas, sustituimos en las ecuaciones iniciales; por ejemplo, en las de los cuerpos 1 y 3:

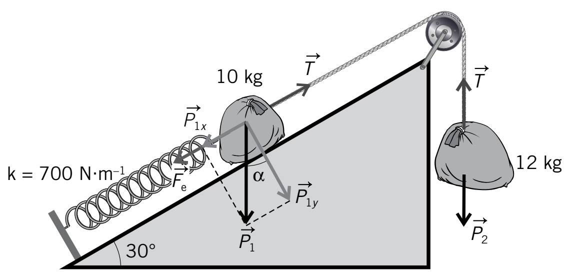
$$P_1 - T_1 = m_1 \cdot a \rightarrow T_1 = P_1 - m_1 \cdot a = m_1 \cdot g - m_1 \cdot a$$

$$T_1 = m_1 \cdot (g - a) = 10 \cdot (9{,}8 - 3{,}11) \approx 67 \text{ N}$$

$$T_2 - P_3 = m_3 \cdot a \rightarrow T_2 = P_3 + m_3 \cdot a = m_3 \cdot g + m_3 \cdot a$$

$$T_2 = m_3 \cdot (g + a) = 3 \cdot (9{,}8 + 3{,}11) \approx 39 \text{ N}$$

41. El diagrama de fuerzas es el que muestra la figura:



Aplicamos la segunda ley de Newton a cada cuerpo. Tenemos en cuenta que el muelle se estira hasta que el sistema alcanza el equilibrio. Siendo F_e la fuerza elástica del muelle, tenemos:

Cuerpo 1: $T - P_{1x} - F_e = 0$

Cuerpo 2: $P_2 - T = 0$

Sumamos las dos ecuaciones y despejamos la deformación del muelle:

$$P_2 - P_{1x} - F_e = 0$$

$$m_2 g - m_1 g \operatorname{sen}\alpha - k\Delta x = 0$$

$$m_2 g - m_1 g \operatorname{sen}\alpha = k\Delta x \rightarrow \Delta x = \frac{m_2 g - m_1 g \operatorname{sen}\alpha}{k}$$

$$\Delta x = \frac{12 \cdot 9{,}8 - 10 \cdot 9{,}8 \cdot \operatorname{sen} 30°}{700} = 0{,}098 \text{ m} = 9{,}8 \text{ cm}$$

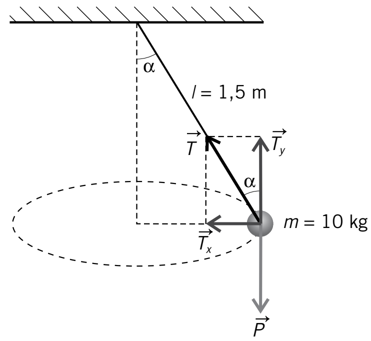
42. La bola lleva la velocidad mínima posible para describir la circunferencia. Esto implica que en el punto más alto de su trayectoria la tensión de la cuerda es nula, y la única fuerza que actúa y que va dirigida hacia el centro de la circunferencia es el peso de la bola.

Por tanto, la expresión de la segunda ley de Newton es:

$$P = m \cdot a_c \rightarrow \cancel{m} \cdot g = \cancel{m} \cdot \frac{v^2}{R} \rightarrow gR = v^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow v = \sqrt{g \cdot R} = \sqrt{9{,}8 \cdot 1{,}0} \approx 3{,}1 \text{ m·s}^{-1}$$

43. El diagrama de fuerzas es el que muestra la figura:



a) El péndulo gira en una circunferencia horizontal. El radio de la trayectoria es, calculado por trigonometría:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{R}{L} \rightarrow R = L \cdot \operatorname{sen}\alpha$$

Aplicamos la segunda ley de Newton en el eje *X:*

$$T_x = m \cdot a_c \rightarrow T \cdot \operatorname{sen}\alpha = m\,\omega^2 R$$

$$T \cdot \cancel{\operatorname{sen}\alpha} = m\,\omega^2\, L\, \cancel{\operatorname{sen}\alpha}$$

$$T = 10 \cdot 3^2 \cdot 1{,}5 = 135 \text{ N}$$

b) Para hallar el ángulo que forma el péndulo con la vertical, planteamos la segunda ley de Newton en el eje *Y* y despejamos:

$$T \cdot \cos\alpha = m \cdot g \rightarrow \cos\alpha = \frac{mg}{T}$$

$$\alpha = \arccos\frac{mg}{T} = \arccos\frac{10 \cdot 9{,}8}{135} \approx 43°$$

44. Si el cubo lleva la velocidad mínima posible para describir la circunferencia, entonces en el punto más alto de su trayectoria la tensión de la cuerda es nula, y la única fuerza que actúa y que va dirigida hacia el centro de la circunferencia es el peso del cubo de agua.

Por tanto, la expresión de la segunda ley de Newton es:

$$P = m \cdot a_c \rightarrow \cancel{m} \cdot g = \cancel{m} \cdot \omega^2 \cdot L \rightarrow \frac{g}{L} = \omega^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

Las velocidades lineal y angular están relacionadas a través del radio de la trayectoria. Así:

$$v = \omega \cdot L = L\sqrt{\frac{g}{L}} = \sqrt{L^{\cancel{2}}\frac{g}{\cancel{L}}} = \sqrt{gL}$$

45. Respuesta sugerida:

Se pide a los alumnos que elaboren un informe de laboratorio. Una estructura típica de informe sería:

— Descripción del experimento y del montaje experimental.

— Datos experimentales.

Los datos deben presentarse en tablas como esta:

EXPERIENCIA	MASA (g)	ESTIRAMIENTO (cm)
1		
2		
3		

— Gráficas y cálculos. A partir de las masas se calculan los pesos y, con ello, la fuerza recuperadora del muelle en cada experiencia.

Se representan los valores de los pesos en el eje *Y* frente al estiramiento.

Se ajustan los datos a una línea recta (por ejemplo, utilizando la «recta de tendencia» en Excel), y la pendiente de la ecuación de la recta es la constante elástica del muelle.

— Comentarios. Puede resultar interesante pedir a los alumnos que incluyan en el informe comentarios sobre las fuentes de error en el experimento y sobre cómo mejorarlo.

46. La fuerza máxima que puede ejercer el estudiante en las condiciones planteadas es igual a la fuerza máxima de rozamiento entre el suelo y sus zapatos.

El valor de esta fuerza es:

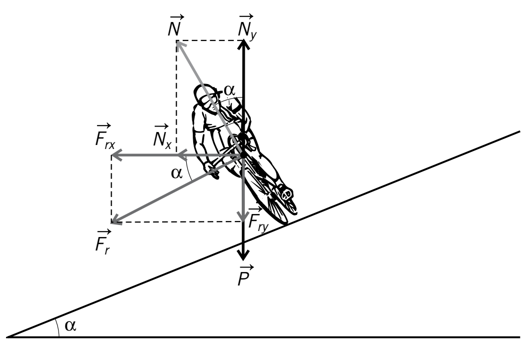
$$F_1 = \mu_1\, m_{est}\, g = 0{,}25 \cdot 70 \cdot 9{,}8 = 171{,}1\ \text{N}$$

Para mover el cajón, debe superar la fuerza de rozamiento entre este y el suelo, cuyo valor es:

$$F_2 = \mu_2\, m_{cajón}\, g = 0{,}20 \cdot 120 \cdot 9{,}8 = 235{,}2\ \text{N}$$

Como la fuerza que es capaz de ejercer el estudiante es menor que la fuerza mínima para mover el cajón, resbalará el calzado del estudiante antes de que pueda mover la caja.

47. El diagrama de fuerzas es el que muestra la figura:



Expresamos la velocidad en unidades del SI:

$$v = 40\,\frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}} \cdot \frac{1000\ \text{m}}{1\ \cancel{\text{km}}} \cdot \frac{1\ \cancel{\text{h}}}{3600\ \text{s}} = 11{,}11\ \text{m·s}^{-1}$$

Aplicamos la segunda ley de Newton en ambos ejes:

— Eje *X:*

$$N \cdot \text{sen}\,\alpha + F_r \cdot \cos\alpha = m \cdot \frac{v^2}{r} \rightarrow$$

$$\rightarrow N \cdot \text{sen}\,\alpha + \mu \cdot N \cdot \cos\alpha = m \cdot \frac{v^2}{r} \rightarrow$$

$$\rightarrow N \cdot (\text{sen}\,\alpha + \mu \cos\alpha) = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

— Eje *Y:* $N \cos\alpha = F_r\, \text{sen}\,\alpha + mg$

$$N\,(\cos\alpha - \mu\ \text{sen}\,\alpha) = mg$$

Dividimos ambas ecuaciones para que se cancelen magnitudes desconocidas y despejamos el ángulo de peralte de la curva. Así:

$$\frac{\cancel{N}(\text{sen}\,\alpha + \mu \cdot \cos\alpha)}{\cancel{N} \cdot (\cos\alpha - \mu\ \text{sen}\,\alpha)} = \frac{\cancel{m} \cdot \dfrac{v^2}{r}}{\cancel{m}\, g} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\text{tg}\,\alpha + \mu}{1 - \mu\,\text{tg}\,\alpha} = \frac{v^2}{r\,g} \rightarrow$$

$$\rightarrow \alpha = \text{arc tg}\left(\frac{v^2 - \mu\, r\, g}{r\, g + \mu v^2}\right) = \text{arc tg}\ 0{,}21 = 12°$$

3 TRABAJO Y ENERGÍA

Págs. 55 y 56

48. a) La fuerza gravitatoria es una fuerza central y, por tanto, una fuerza conservativa. El trabajo que ejerce toda fuerza conservativa a lo largo de una trayectoria cerrada es cero. Por eso, el trabajo que realiza la fuerza gravitatoria de la Tierra sobre la Luna en una vuelta completa es cero.

b) La energía cinética de un cuerpo nunca puede ser negativa. Su expresión matemática solo incluye cantidades positivas (masa y módulo de la velocidad).

c) Si un cuerpo se mueve con MRU, con velocidad constante, no varía su energía cinética. Por tanto, por el teorema de las fuerzas vivas, el trabajo de la fuerza resultante que actúa sobre el cuerpo es nulo.

d) Cuando se sostiene un cuerpo, el desplazamiento de este es nulo. Dado que el trabajo es el producto escalar de la fuerza por el vector desplazamiento, también es nulo.

e) La fuerza peso lleva la dirección vertical. En la situación descrita, el cuerpo se desplaza en dirección horizontal. Entonces, los vectores fuerza y desplazamiento forman entre sí un ángulo de 90º y su producto escalar es cero. En conclusión, el trabajo en este caso es nulo.

f) Como el descenso se produce a velocidad constante, no hay cambio en la energía cinética. Al tratarse de un movimiento de descenso, la energía potencial del automóvil (respecto al suelo) disminuye. Por tanto, la energía mecánica del automóvil (suma de las energías cinética y potencial) disminuye. La responsable de esta disminución es la fuerza de frenada, que realiza un trabajo disipativo.

49. El trabajo que efectúa cada persona se obtiene como el producto escalar de la fuerza por el desplazamiento que provoca en el objeto.

La persona que sube el objeto hasta una altura h tirando de una cuerda ejerce una fuerza vertical igual al peso, y la fuerza y el desplazamiento llevan la misma dirección y el mismo sentido. Veamos:

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = mg \cdot \Delta r \cdot \cos 0° = mgh$$

Por su parte, la persona que utiliza un plano inclinado de ángulo α sin rozamiento tiene que hacer una fuerza menor, puesto que solo ha de contrarrestar la componente x del peso:

$$F = P_x = mg \operatorname{sen} \alpha$$

Hallamos, por trigonometría, el desplazamiento que esta fuerza provoca sobre el plano mientras el cuerpo asciende hasta la misma altura h:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{h}{\Delta r} \rightarrow \Delta r = \frac{h}{\operatorname{sen}\alpha}$$

La fuerza es paralela al plano, por lo que forma un ángulo de 0º con el desplazamiento.

El trabajo que efectúa esta persona es:

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = mg \cancel{\operatorname{sen}\alpha} \cdot \frac{h}{\cancel{\operatorname{sen}\alpha}} \cdot \cos 0° = mgh$$

En conclusión, las dos personas realizan el mismo trabajo.

50. Aplicamos el teorema de las fuerzas vivas:

$$W = \Delta E_c$$

Dado que el bloque se mueve con velocidad constante, entonces el trabajo de la fuerza resultante es cero:

$$W_F + W_{roz.} = 0 \rightarrow W_F = -W_{roz.}$$
$$W_F = -F_r \cdot \Delta r \cdot \cos\alpha = -\mu\, mg \cdot \Delta r \cdot \cos 180°$$
$$W_F = -0{,}2 \cdot 25 \cdot 9{,}8 \cdot 4{,}0 \cdot (-1) = 196 \text{ J}$$

Y el trabajo de la fuerza de rozamiento tiene el mismo valor pero signo negativo porque la fuerza de rozamiento tiene sentido contrario al movimiento.

51. El dato del caudal que queremos extraer del pozo significa que la bomba debe desarrollar una potencia que permita que asciendan 100 L de agua durante un tiempo de 60 s.

Utilizamos el dato de la densidad del agua para determinar su masa:

$$m = d \cdot V =$$
$$= 1\ \cancel{g} \cdot \cancel{mL^{-1}} \cdot 100\ \cancel{L} \cdot \frac{1000\ \cancel{mL}}{1\ \cancel{L}} \cdot \frac{1\text{ kg}}{1000\ \cancel{g}} = 100 \text{ kg}$$

Hallamos la potencia que debe desarrollar la bomba a partir de la definición:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{mgh}{t} = \frac{100 \cdot 9{,}8 \cdot 12}{60} = 196 \text{ W}$$

52. Expresamos la velocidad en unidades del SI:

$$v = 90 \frac{\cancel{km}}{\cancel{h}} \cdot \frac{1000 \text{ m}}{1\ \cancel{km}} \cdot \frac{1\ \cancel{h}}{3600 \text{ s}} = 25 \text{ m·s}^{-1}$$

La fuerza del motor que acelera el coche realiza un trabajo que calculamos a partir del teorema de las fuerzas vivas.

$$W = \Delta E_c = \frac{1}{2} m v_f^2 = \frac{1}{2} \cdot 2500 \cdot 25^2 = 7{,}85 \cdot 10^5 \text{ J}$$

Para averiguar durante cuánto tiempo actúa la fuerza hasta que el coche alcanza su velocidad final, utilizamos las ecuaciones del MRUA:

$$v = v_0 + at \rightarrow a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{25}{t}$$

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow 112{,}5 = \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{\cancel{t}} \cdot t^{\cancel{2}} \rightarrow$$

$$\rightarrow t = \frac{2 \cdot 112{,}5}{25} = 9 \text{ s}$$

Por tanto, dado que 1 CV = 735 W, la potencia es:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{7{,}85 \cdot 10^5}{9} = 8{,}68 \cdot 10^4 \text{ W} \cdot \frac{1 \text{ CV}}{735 \text{ W}} = 118{,}1 \text{ CV}$$

La potencia desarrollada por una fuerza constante se relaciona con la velocidad:

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Cuando el coche sube por la cuesta sin rozamiento y a velocidad constante, la fuerza del motor es paralela al plano y se calcula por la segunda ley de Newton:

$$F_m - P_x = m \cdot a = 0 \rightarrow F_m = P_x \rightarrow F_m = mg \operatorname{sen}\alpha$$

Sustituimos en la expresión de la potencia y despejamos la velocidad:

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = F_m \cdot v \cdot \cos 0° \rightarrow v = \frac{P}{mg \operatorname{sen}\alpha}$$

$$v = \frac{8{,}68 \cdot 10^4}{2500 \cdot 9{,}8 \cdot \frac{200}{2000}} = 35{,}43 \text{ m·s}^{-1}$$

53. El trabajo efectuado por el peso, o fuerza gravitatoria, se relaciona con la variación de la energía potencial:

$$W_g = -\Delta E_p = -(0 - mgh_0) = 2 \cdot 9{,}8 \cdot 5 = 98 \text{ J}$$

El trabajo realizado por la fuerza de rozamiento, que es una fuerza no conservativa, es igual a la variación de la energía mecánica entre las posiciones A (parte superior del plano inclinado) y B (suelo):

$$W_r = \Delta E_m = E_{cB} - E_{pA} = \frac{1}{2} m v_b^2 - mgh$$

$$W_r = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6^2 - 2 \cdot 9{,}8 \cdot 5 = -62 \text{ J}$$

54. Expresamos la masa de la bola en unidades del SI:

$$m = 100\ \cancel{g} \cdot \frac{1 \text{ kg}}{1000\ \cancel{g}} = 0{,}1 \text{ kg}$$

Aplicamos el teorema de conservación de la energía mecánica entre la posición A y el punto más bajo de la trayectoria (B) para hallar la velocidad en B. Veamos:

$$\Delta E_m = 0 \rightarrow E_{cB} - E_{pA} = 0 \rightarrow \frac{1}{2} \cancel{m} v^2 - \cancel{m} gh = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow v^2 = 2gh \rightarrow v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot 2} = 6{,}26 \text{ m·s}^{-1}$$

Para determinar la fuerza que ejerce la superficie sobre el cuerpo (fuerza normal), planteamos la segunda ley de Newton considerando que, en la posición B, la bola está describiendo un movimiento circular y, por tanto, su aceleración es normal:

$$N - P = m \cdot \frac{v^2}{R} \rightarrow N = mg + m \cdot \frac{v^2}{R}$$

Sustituimos el valor de la velocidad hallado anteriormente. Y tenemos en cuenta que el radio de la trayectoria circular es igual a la altura inicial desde la que se deja caer la bola:

$$N = mg + m \cdot \frac{2g\cancel{h}}{\cancel{h}} \rightarrow N = 3mg = 3 \cdot 0{,}1 \cdot 9{,}8 = 2{,}94\ \text{N}$$

55. Aplicamos el teorema de conservación de la energía mecánica en presencia de fuerzas no conservativas entre las posiciones *A* (punto desde el que se deja caer el cuerpo) y *B* (base del plano inclinado):

$$\Delta E_m = W_r \rightarrow E_{mB} - E_{mA} = F_r \Delta r \cos 180°$$

$$\frac{1}{2} m v_B^2 - mg\ h_A = -\mu \cdot \underbrace{mg \cos\alpha}_{N} \cdot \Delta r$$

Relacionamos, por trigonometría, el recorrido sobre el plano inclinado (Δr) con la altura, sustituimos y despejamos:

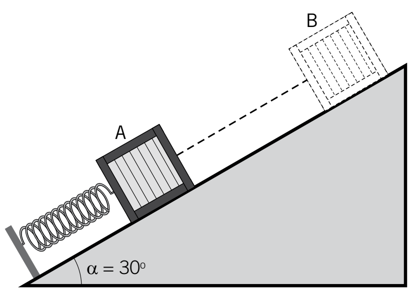
$$\frac{1}{2} v_B^2 - g\ h_A = -\mu \cdot g \cos\alpha \cdot \frac{h_A}{\operatorname{sen}\alpha}$$

$$\frac{1}{2} \cdot 8{,}0^2 - 9{,}8 h_A = -0{,}2 \cdot 9{,}8 \cdot \frac{h_A}{\operatorname{tg} 30°}$$

$$32 = 9{,}8 h_A - 3{,}395 h_A$$

$$32 = 6{,}405 h_A \rightarrow h_A = \frac{32}{6{,}405} \approx 5\ \text{m}$$

56.



Aplicamos el teorema de conservación de la energía mecánica en presencia de fuerzas no conservativas entre las posiciones *A* y *B* de la figura:

$$\Delta E_m = W_r \rightarrow E_{mB} - E_{mA} = F_r \Delta r \cos 180°$$

$$mgh_B - \frac{1}{2} k x^2 = -\mu \cdot \underbrace{mg \cos\alpha}_{N} \cdot \Delta r$$

Relacionamos, por trigonometría, la altura final (h_B) con el recorrido sobre el plano inclinado (Δr), sustituimos y despejamos:

$$mg \Delta r \operatorname{sen}\alpha - \frac{1}{2} k x^2 = -\mu \cdot mg \cos\alpha \cdot \Delta r$$

$$mg \Delta r \operatorname{sen}\alpha + \mu \cdot mg \cos\alpha \cdot \Delta r = \frac{1}{2} k x^2$$

$$0{,}5 \cdot 9{,}8 \cdot \operatorname{sen} 30° \cdot \Delta r + 0{,}1 \cdot 0{,}5 \cdot 9{,}8 \cdot \cos 30° \cdot \Delta r =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 200 \cdot 0{,}1^2$$

$$2{,}45 \cdot \Delta r + 0{,}424 \cdot \Delta r = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow 2{,}874 \cdot \Delta r = 1 \rightarrow \Delta r = \frac{1}{2{,}874} = 0{,}3479\ \text{m} = 34{,}79\ \text{cm}$$

57. Aplicamos el teorema de conservación de la energía mecánica entre las posiciones *A* (cuerpo 2 m sobre el suelo) y *B* (cuerpo sobre el resorte comprimido). Tomamos como origen de potencial el extremo del muelle comprimido:

$$\Delta E_m = 0 \rightarrow E_{mB} - E_{mA} = 0$$

$$mg(h_A + x) - \frac{1}{2} k x^2 = 0$$

Sustituimos y despejamos hasta hallar la deformación del resorte:

$$2 \cdot 9{,}8 \cdot (2 + x) - \frac{1}{2} \cdot 4\,000 \cdot x^2 = 0$$

$$-2\,000 x^2 + 19{,}6 x + 39{,}2 = 0$$

$$500 x^2 - 4{,}9 x - 9{,}8 = 0$$

$$x = \frac{4{,}9 \pm \sqrt{4{,}9^2 + 4 \cdot 500 \cdot 9{,}8}}{1000} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -0{,}13\ \text{m} \\ x_2 = 0{,}14\ \text{m} \end{cases}$$

La primera solución no tiene sentido físico. Así pues, la deformación máxima del muelle es de 14 cm.

58. Expresamos los datos del problema en unidades del SI:

$$m = 20\ \cancel{g} \cdot \frac{1\ \text{kg}}{1000\ \cancel{g}} = 2 \cdot 10^{-2}\ \text{kg}$$

$$x = 40\ \cancel{\text{cm}} \cdot \frac{1\ \text{m}}{100\ \cancel{\text{cm}}} = 0{,}4\ \text{m}$$

$$\Delta r = 5\ \cancel{\text{cm}} \cdot \frac{1\ \text{m}}{100\ \cancel{\text{cm}}} = 5 \cdot 10^{-2}\ \text{m}$$

Aplicamos el teorema de conservación de la energía mecánica entre el lanzamiento (*A*) y la posición más alta de la flecha (*B*), despejamos y hallamos la constante elástica del arco:

$$\Delta E_m = 0 \rightarrow E_{mB} - E_{mA} = 0$$

$$mg(h_B - h_A) - \frac{1}{2} k x^2 = 0$$

$$2 \cdot 10^{-2} \cdot 9{,}8 \cdot (50 - 2) = \frac{1}{2} \cdot k \cdot 0{,}4^2$$

$$9{,}408 = 0{,}08 \cdot k \rightarrow k = \frac{9{,}408}{0{,}08} = 117{,}6\ \text{N} \cdot \text{m}^{-1}$$

Aplicamos el teorema de conservación de la energía mecánica en presencia de fuerzas no conservativas entre las posiciones *B* y *C* (flecha clavada en el suelo), despejamos y hallamos la fuerza de resistencia del suelo:

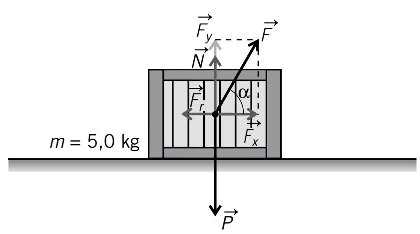
$$\Delta E_m = W_r \rightarrow E_{mC} - E_{mB} = F \Delta r \cos 180°$$

$$0 - mg(h_B + \Delta r) = -F \Delta r$$

$$2 \cdot 10^{-2} \cdot 9{,}8 \cdot (50 + 5 \cdot 10^{-2}) = 5 \cdot 10^{-2} \cdot F$$

$$9{,}8098 = 0{,}05 \cdot F \rightarrow F = \frac{9{,}8098}{0{,}05} \approx 196{,}2\ \text{N}$$

59. El diagrama de fuerzas es el que muestra la figura:



Aplicamos la segunda ley de Newton en el eje Y y calculamos el valor de la fuerza normal:

$$N + F_y - P = 0 \rightarrow N = P - F_y$$
$$N = mg - F \operatorname{sen} \alpha = 5{,}0 \cdot 9{,}8 - 20 \cdot \operatorname{sen} 60°$$
$$N = 31{,}679 \text{ N}$$

a) Aplicamos el teorema de las fuerzas vivas:

$$W_T = \Delta E_c = 0 \rightarrow W_F + W_r = 0$$
$$F \cdot \cancel{\Delta r} \cdot \cos\alpha + \mu \cdot N \cdot \cancel{\Delta r} \cdot \cos 180° = 0$$
$$20 \cdot \cos 60° - \mu \cdot 31{,}679 = 0$$
$$10 = 31{,}679\mu \rightarrow \mu = \frac{10}{31{,}679} \approx 0{,}31$$

b) Como el bloque se mueve a velocidad constante, no hay variación de la energía cinética y, por tanto, el trabajo total de las fuerzas que actúan sobre el bloque es siempre igual a cero.

60. Expresamos los datos del problema en unidades del SI:

$$m = 600\ \cancel{g} \cdot \frac{1 \text{ kg}}{1000\ \cancel{g}} = 0{,}6 \text{ kg}$$
$$\Delta r = 60\ \cancel{cm} \cdot \frac{1 \text{ m}}{100\ \cancel{cm}} = 0{,}6 \text{ m}$$
$$r = 50\ \cancel{cm} \cdot \frac{1 \text{ m}}{100\ \cancel{cm}} = 0{,}5 \text{ m} \rightarrow h_C = 2r = 1 \text{ m}$$

a) Aplicamos el teorema de conservación de la energía mecánica en presencia de fuerzas no conservativas entre la posición inicial A y la posición final D con el muelle comprimido; despejamos y hallamos la deformación del muelle:

$$\Delta E_m = W_r \rightarrow E_{mD} - E_{mA} = W_{r(A \rightarrow B)} + W_{r(B \rightarrow D)}$$
$$\frac{1}{2} kx^2 - mgh_A = F_{r1}\Delta r_1 \cos 180° + F_{r2}\Delta r_2 \cos 180°$$
$$\frac{1}{2} kx^2 - mgh_A = -\mu mg \cos\alpha \frac{h_A}{\operatorname{sen}\alpha} - \mu mg\Delta r_2$$
$$\frac{1}{2} kx^2 = mg\left(h_A - \mu \frac{h_A}{\operatorname{tg}\alpha} - \mu\Delta r_2\right)$$
$$\frac{1}{2} \cdot 500 \cdot x^2 = 0{,}6 \cdot 9{,}8\left(2{,}5 - 0{,}3 \cdot \frac{2{,}5}{\operatorname{tg} 45°} - 0{,}3 \cdot 0{,}6\right)$$
$$250 \cdot x^2 = 9{,}2316 \rightarrow x^2 = \frac{9{,}2316}{250} \rightarrow x = \sqrt{0{,}0369}$$
$$x \approx 0{,}2 \text{ m}$$

b) Aplicamos el teorema de conservación de la energía mecánica en presencia de fuerzas no conservativas entre las posiciones A y C de la figura; despejamos y hallamos la velocidad en el punto más alto del bucle:

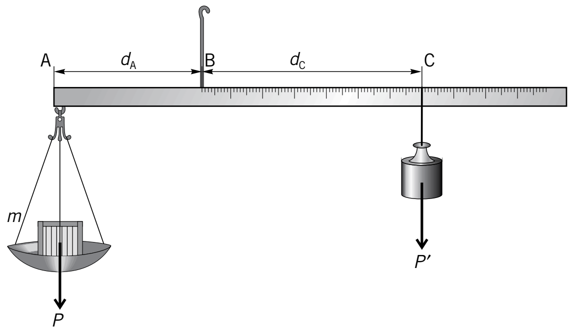
$$\Delta E_m = W_r \rightarrow E_{mC} - E_{mA} = F_{r1}\Delta r_1 \cos 180°$$
$$\frac{1}{2}\cancel{m} v_C^2 + \cancel{m} g h_C - \cancel{m} g h_A = -\mu \cdot \cancel{m} g \cos\alpha \cdot \frac{h_A}{\operatorname{sen}\alpha}$$
$$\frac{1}{2} v_C^2 = -9{,}8 \cdot 1 + 9{,}8 \cdot 2{,}5 - 0{,}3 \cdot 9{,}8 \cdot \frac{2{,}5}{\operatorname{tg} 45°}$$
$$v_C^2 = 2 \cdot 7{,}35 = 14{,}7 \rightarrow v_C = \sqrt{14{,}7} = 3{,}834 \text{ m·s}^{-1}$$

Para calcular la fuerza que ejerce la superficie del bucle sobre el cuerpo (fuerza normal), planteamos la segunda ley de Newton considerando que, en la posición C, el coche está describiendo un movimiento circular y, por tanto, su aceleración es normal:

$$N + P = m \cdot \frac{v^2}{r} \rightarrow N = m \cdot \frac{v^2}{r} - mg$$
$$N = 0{,}6 \cdot \frac{14{,}7}{0{,}5} - 0{,}6 \cdot 9{,}8 = 11{,}76 \text{ N}$$

4 DINÁMICA DE ROTACIÓN Pág. 56

61. a) En una balanza de brazos distintos, del brazo más corto pende el cuerpo cuya masa queremos determinar; en el brazo largo colocamos una pesa de valor conocido sobre una varilla graduada a la distancia adecuada para que se alcance el equilibrio.



En equilibrio, se cumple que el momento resultante es nulo. Calculando respecto al punto B de la figura, tenemos que:

$$P \cdot d_A = P' \cdot d_C \rightarrow m\cancel{g} d_A = m'\cancel{g} d_C$$
$$m = \frac{d_C}{d_A} \cdot m'$$

La masa queda, pues, determinada a partir de la pesa conocida y de las distancias.

b) El momento de inercia de un objeto se define respecto a un eje de rotación. Por tanto, como un objeto puede tener más de un eje de rotación, puede presentar más de un momento de inercia.

62. La energía cinética se relaciona con la velocidad angular a través del momento de inercia:

$$E_C = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}11 \cdot 28^2 = 43{,}12 \text{ J}$$

63. El módulo del momento angular es:

$$L = mvr \operatorname{sen}\alpha$$

Sustituimos por los valores de la órbita de Mercurio:

$$L = 3{,}18 \cdot 10^{23} \cdot 3{,}88 \cdot 10^4 \cdot 5{,}80 \cdot 10^{10}$$
$$L \approx 7{,}16 \cdot 10^{38} \text{ kg·m}^2\text{·s}^{-1}$$

64. Cuando un gato cae, lo primero que hace es doblar el cuerpo para que las dos secciones de su cuerpo roten sobre ejes distintos. A continuación, aprieta sus patas delanteras contra su cuerpo a fin de reducir su momento angular; al mismo tiempo, extiende las patas de atrás para aumentar el momento angular en la parte trasera de su cuerpo, lo que le ayuda a rotar la parte delantera hasta 90°, mientras la trasera solo gira unos 10° (en sentido contrario) durante esta fase. Por último, para que la parte trasera de su cuerpo termine de girar, el gato extiende sus patas delanteras y acerca a su cuerpo las traseras para producir el efecto inverso. Así, todo el tiempo el momento angular total permanece igual a cero.

Lo que permite a los gatos rotar como si fueran dos cilindros acoplados entre sí por un extremo es la gran flexibilidad de sus vértebras y el hecho de no tener clavícula. La cola no desempeña ninguna función en el reflejo de enderezamiento.

65. El momento de una fuerza respecto a un punto es un vector que se define como el producto vectorial entre el vector posición del punto de aplicación y la fuerza:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \rightarrow |\vec{M}| = M = rF\ \text{sen}\,\alpha$$

La dirección es perpendicular al plano formado por los vectores $\vec{r}$ y $\vec{F}$, y el sentido es el del giro del vector $\vec{r}$ sobre el vector $\vec{F}$:

$M_A = 65 \cdot 0{,}12 \cdot \text{sen}\,90° = 7{,}8$ N·m; dirección perpendicular al papel, sentido entrante.

$M_B = 65 \cdot 0{,}12 \cdot \text{sen}\,0° = 0$

$M_C = 65 \cdot 0{,}12 \cdot \text{sen}\,90° = 7{,}8$ N·m; dirección perpendicular al papel, sentido saliente.

$M_B = 65 \cdot 0 \cdot \text{sen}\,0° = 0$

66. Expresamos la distancia entre los átomos en unidades del SI:

$$d = 74{,}1\ \cancel{\text{pm}} \cdot \frac{1\ \text{m}}{10^{12}\ \cancel{\text{pm}}} = 74{,}1 \cdot 10^{-12}\ \text{m}$$

El momento de inercia de la molécula es la suma del momento de inercia de cada átomo:

$$I = \sum m_i \cdot r_i^2 = m_H \left(\frac{d}{2}\right)^2 + m_H \left(\frac{d}{2}\right)^2 =$$

$$= 2m_H \frac{d^2}{4} = \frac{m_H d^2}{2}$$

$$I = \frac{1{,}68 \cdot 10^{-27} \cdot (74 \cdot 10^{-12})^2}{2} = 3{,}55 \cdot 10^{39}\ \text{kg·m}^2\text{·s}^{-1}$$

67. Marte describe un MCU. Calculamos la velocidad de giro a partir de su relación con el período:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{5{,}94 \cdot 10^7} = 1{,}058 \cdot 10^{-7}\ \text{rad·s}^{-1}$$

Y determinamos el módulo del momento angular:

$$L = m \cdot \omega \cdot r^2 = 6{,}46 \cdot 10^{23} \cdot 1{,}058 \cdot 10^{-7} \cdot (2{,}28 \cdot 10^{11})^2$$

$$L = 3{,}55 \cdot 10^{39}\ \text{kg·m}^2\text{·s}^{-1}$$

68. Aplicamos la conservación del momento angular, pues durante el movimiento del estudiante no actúa ninguna fuerza externa:

$$L = \text{cte} \rightarrow I\,\omega = I'\,\omega'$$

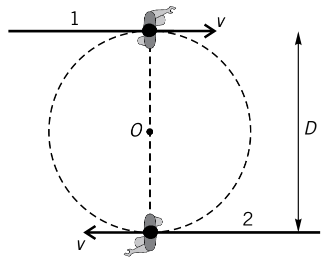
Los momentos de inercia están relacionados según:

$$I' = \frac{I}{3}$$

Sustituimos y despejamos ω':

$$\cancel{I}\,\omega = \frac{\cancel{I}}{3}\omega' \rightarrow \omega' = 3\omega$$

69.



En el momento en el que se entrelazan, cada patinador ejerce sobre el otro una fuerza dirigida hacia el centro, que cambia la dirección de la velocidad. Así, su movimiento rectilíneo pasa a ser circular y se cumple la relación entre las velocidades lineal y angular. Veamos:

$$v = \omega R \rightarrow v = \omega \frac{D}{2} \rightarrow \omega = \frac{2v}{D}$$

SÍNTESIS

Pág. 56

70. Expresamos la masa de la piedra en unidades del SI:

$$m = 200\ \cancel{\text{g}} \cdot \frac{1\ \text{kg}}{1000\ \cancel{\text{g}}} = 0{,}2\ \text{kg}$$

Durante el giro de la honda, la tensión es máxima cuando la piedra pasa por el punto más bajo de su trayectoria vertical. En ese punto, aplicamos la segunda ley de Newton:

$$T - P = m \cdot a_c \rightarrow T - mg = m\frac{v^2}{r}$$

a) Si giramos la honda cada vez más rápido, la cuerda se romperá con la piedra en el punto más bajo de la trayectoria y cuando la tensión sea de 50 N.

Sustituimos y despejamos la velocidad:

$$50 - 0{,}2 \cdot 9{,}8 = 0{,}2 \cdot \frac{v^2}{1{,}2} \rightarrow \frac{48{,}04 \cdot 1{,}2}{0{,}2} = v^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow v = \sqrt{288{,}24} \approx 17\ \text{m·s}^{-1}$$

b) Cuando se rompe la cuerda, la piedra lleva una velocidad horizontal.

A partir de ahí, describe un movimiento en dos dimensiones, resultado de combinar un MRU en el eje X y una caída libre (MRUA) en el eje Y.

La altura inicial de la piedra es:

$$y_0 = y_C - r = 6 - 1{,}2 = 4{,}8\ \text{m}$$

Aplicamos la ecuación del movimiento en el eje Y para hallar el tiempo que la piedra está en el aire:

$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \rightarrow 0 = 4{,}8 - 4{,}9t^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow t^2 = \frac{4{,}8}{4{,}9} \rightarrow t = \sqrt{0{,}9796} = 0{,}9897\ \text{s}$$

Determinamos la distancia horizontal recorrida por la piedra sustituyendo en la ecuación de movimiento del eje *X:*

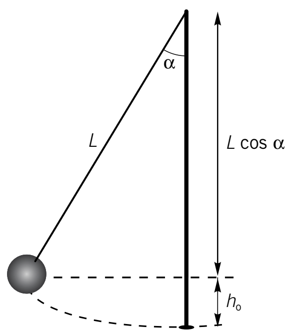
$$x = v_x t = 16{,}978 \cdot 0{,}9897 \approx 17 \text{ m}$$

71. En primer lugar, aplicamos la conservación de la energía durante el movimiento del péndulo con objeto de averiguar a qué velocidad impacta con la masa, *m:*

$$\Delta E_m = 0 \rightarrow E_{cA} - E_{p0} = 0$$

$$\frac{1}{2}\cancel{m} v_A^2 - \cancel{m} g h_0 = 0 \rightarrow v_A^2 = 2gh_0 \rightarrow v_A = \sqrt{2gh_0}$$

Hallamos la altura inicial del péndulo por trigonometría:



$$h_0 = L - L\cos\alpha = 1{,}4 - 1{,}4\cos 15° = 0{,}0477 \text{ m}$$

Sustituimos y obtenemos la velocidad:

$$v_A = \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}0477} = 0{,}967 \text{ m·s}^{-1}$$

Aplicamos la conservación del momento lineal durante el impacto de la bola de acero del péndulo con la masa en reposo:

$$\vec{p}_0 = \vec{p} \rightarrow M v_A = m v'_A \rightarrow v'_A = \frac{M}{m} v_A$$

$$v'_A = \frac{9}{1} \cdot 0{,}967 = 8{,}703 \text{ m·s}^{-1}$$

Aplicamos el teorema de conservación de la energía mecánica en presencia de fuerzas no conservativas entre la salida de la bola de masa, *m*, tras el impacto (*A*) y la posición final, con el muelle comprimido (*C*):

$$\Delta E_m = W_r \rightarrow E_{mC} - E_{mA} = F_r \Delta r \cos 180°$$

$$mgh_C + \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}mv_A'^2 = -\mu \cdot mg\Delta r$$

Relacionamos por trigonometría la altura, h_C, con el recorrido sobre el plano y la deformación del muelle, sustituimos y despejamos:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{h_C}{s + x} \rightarrow h_C = (s + x)\operatorname{sen}\alpha$$

donde *s* es la distancia sobre la rampa y *x*, lo que se comprime el muelle:

$$1 \cdot 9{,}8 \cdot (4{,}0 + x) \cdot \operatorname{sen} 10° + \frac{770 \cdot x^2}{2} - \frac{1 \cdot 8{,}7^2}{2} =$$

$$= -0{,}12 \cdot 1 \cdot 9{,}8 \cdot 2{,}5$$

$$385x^2 + 1{,}702x - 28{,}12 = 0$$

$$x = \frac{-1{,}7 \pm \sqrt{1{,}7^2 + 4 \cdot 385 \cdot 28{,}12}}{2 \cdot 385} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -0{,}27 \text{ m} \\ x_2 = 0{,}27 \text{ m} \end{cases}$$

La primera solución no tiene sentido físico. Por tanto, el muelle se comprime 27 cm.

Evaluación (Pág. 58)

1. Opción d).

Derivamos la ecuación del movimiento para calcular la velocidad:

$$v = \frac{ds}{dt} = 0{,}4t \text{ m·s}^{-1}$$

$$v(t = 5 \text{ s}) = 0{,}4 \cdot 5 = 2 \text{ m·s}^{-1}$$

La componente normal de la aceleración, o aceleración centrípeta, es:

$$a_c = \frac{v^2}{r}$$

$$a_c(t = 5 \text{ s}) = \frac{2^2}{2{,}00} = 2{,}0 \text{ m·s}^{-2}$$

2. Opción b).

Expresamos la velocidad en unidades del SI:

$$v = 57{,}6 \frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}} \cdot \frac{1000 \text{ m}}{1 \cancel{\text{km}}} \cdot \frac{1 \cancel{\text{h}}}{3600 \text{ s}} = 16 \text{ m·s}^{-1}$$

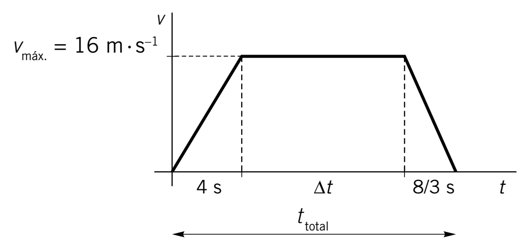
En primer lugar, calculamos el tiempo que necesita el coche para alcanzar su velocidad máxima partiendo del reposo. Efectúa un MRUA:

$$v = v_0 + a\Delta t \rightarrow \Delta t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{16}{4{,}00} = 4 \text{ s}$$

Y, de la misma forma, hallamos el tiempo que necesita el coche para detenerse:

$$v = v_0 + a\Delta t \rightarrow \Delta t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{-16}{-6{,}00} = \frac{8}{3} \text{ s}$$

Construimos la gráfica *v-t* del movimiento, que incluye un tramo de MRU a la velocidad máxima del coche:



La distancia total recorrida por el coche se calcula como el área bajo la curva en la gráfica *v-t:*

$$d_{\text{tot.}} = A_1 + A_2 + A_3$$

$$500 = \frac{16 \cdot 4}{2} + 16 \cdot \Delta t + \frac{16 \cdot 8/3}{2}$$

$$500 = 32 + 16 \cdot \Delta t + \frac{64}{3}$$

$$\Delta t = \frac{500 - 32 - \frac{64}{3}}{16} = \frac{335}{12}$$

Por tanto, el tiempo mínimo necesario es:

$$t = 4 + \frac{335}{12} + \frac{8}{3} = \frac{415}{12} = 34{,}583 \text{ s}$$

3. Opción a).

La distancia de seguridad es la suma de la distancia recorrida durante el tiempo de reacción (MRU a 72 km/h) y la distancia recorrida durante el tiempo de frenado (MRUA).

Expresamos la velocidad inicial en unidades del SI:

$$v = 72\,\frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}} \cdot \frac{1000 \text{ m}}{1\,\cancel{\text{km}}} \cdot \frac{1\,\cancel{\text{h}}}{3600 \text{ s}} = 20 \text{ m·s}^{-1}$$

Calculamos el tiempo de frenado:

$$v = v_0 + a\,\Delta t \rightarrow \Delta t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{-20}{-5} = 4 \text{ s}$$

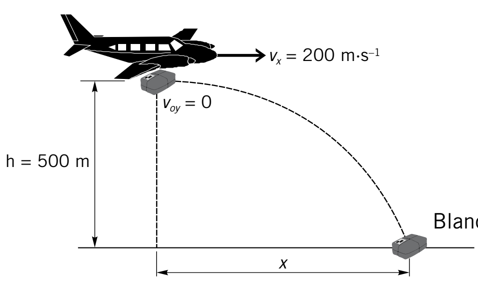
La distancia recorrida es:

$$s = v_0 \cdot t_{\text{reacción}} + v_0 \cdot t_{\text{frenado}} + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_{\text{frenado}}^2$$

$$s = 20 \cdot 0{,}3 + 20 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot (-5) \cdot 4^2 = 46 \text{ m}$$

4. Opción d).

El paquete describe un movimiento parabólico en dos dimensiones, resultante de combinar un MRU en el eje *X* y un MRUA (caída libre) en el eje *Y*.



Hallamos el tiempo de caída libre utilizando la ecuación del movimiento en el eje *Y*:

$$y = y_0 + v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 - 50 = 500 - 5\,t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{500}{5}} = 10 \text{ s}$$

La distancia horizontal recorrida durante ese tiempo es:

$$x = v_x \cdot t = 200 \cdot 10 = 2000 \text{ m}$$

5. Opción c).

Aplicamos la segunda ley de Newton a las tres situaciones:

$$\left.\begin{array}{l} F = m_1 \cdot a_1 \rightarrow m_1 = \dfrac{F}{a_1} \\ F = m_2 \cdot a_2 \rightarrow m_2 = \dfrac{F}{a_2} \end{array}\right\} \rightarrow m_1 + m_2 = F\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}\right)$$

$$F = (m_1 + m_2) \cdot a_3 \rightarrow \cancel{F} = \cancel{F}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}\right)a_3$$

$$a_3 = \frac{1}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2}} = \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} = \frac{2{,}0 \cdot 3{,}0}{2{,}0 + 3{,}0} = 1{,}2 \text{ m·s}^{-2}$$

6. Cambiamos a unidades del SI los datos del problema:

$$m = 10 \text{ g} = 10^{-2} \text{ kg}$$
$$s = 10 \text{ cm} = 0{,}10 \text{ m}$$

Aplicamos el teorema de las fuerzas vivas:

$$W_r = \Delta E_c \rightarrow F_r \cdot \Delta r \cdot \cos 180° = 0 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

Despejamos la velocidad y sustituimos:

$$v^2 = \frac{2 \cdot F_r \cdot \Delta r}{m} = \frac{2 \cdot 50 \cdot 0{,}10}{10^{-2}} = 1000 \text{ m}^2\text{·s}^{-2}$$
$$v = \sqrt{1000} = 10\sqrt{10} = 22{,}36\sqrt{2} = 31{,}6 \text{ m·s}^{-1}$$

7. Opción a).

Expresamos la velocidad en unidades del SI:

$$v = 36\,\frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}} \cdot \frac{1000 \text{ m}}{1\,\cancel{\text{km}}} \cdot \frac{1\,\cancel{\text{h}}}{3600 \text{ s}} = 10 \text{ m·s}^{-1}$$

Para subir por un plano inclinado, hay que contrarrestar la componente del peso paralela al plano con una fuerza, *F*, en la misma dirección y sentido opuesto. Si el ascenso es a velocidad constante, la segunda ley de Newton queda como sigue:

$$F = P_x = P \cdot \text{sen}\,\alpha = mg\,\text{sen}\,\alpha = 3 \cdot 9{,}8 \cdot \text{sen}\,30° = 14{,}7 \text{ N}$$

La potencia desarrollada por esa fuerza es igual al trabajo de la fuerza por unidad de tiempo:

$$P = \frac{W_F}{t} = \frac{F \cdot \Delta r \cdot \cos 0°}{t} = F \cdot v = 14{,}7 \cdot 10 = 147 \text{ W}$$

8. Opción a).

Aplicamos el teorema de las fuerzas vivas para relacionar los datos del problema:

$$\Delta E_c = W_F \rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2E_{c0} - E_{c0} = F \cdot d \\ E_{cf} - E_{c0} = F \cdot 2d \end{array}\right.$$

Sustituimos en la segunda expresión hasta despejar el valor de la energía cinética final en función de la inicial:

$$E_{cf} - E_{c0} = 2 \cdot (2E_{c0} - E_{c0})$$
$$E_{cf} = E_{c0} + 2 \cdot E_{c0} = 3 \cdot E_{c0}$$

Por tanto, la energía cinética final es tres veces mayor que la inicial.

9. Opción a).

Calculamos el aumento porcentual de la velocidad a partir de la definición de momento lineal:

$$p_f = 1{,}15 p_0 \rightarrow \cancel{m} \cdot v_f = 1{,}15 \cdot \cancel{m} \cdot v_0 \rightarrow v_f = 1{,}15\,v_0$$

Sustituimos en la definición de energía cinética:

$$E_{cf} = \frac{1}{2} m v_f^2 = \frac{1}{2} m \left(1{,}15 v_0\right)^2 =$$

$$= 1{,}15^2 \cdot \underbrace{\frac{1}{2} m v_0^2}_{E_{c0}} = 1{,}3225 \cdot E_{c0}$$

El factor de aumento proporcional es 1,32, por lo que la energía cinética aumenta en un 32 %.

10. Opción c).

La energía potencial de una partícula sometida a la acción de una fuerza se calcula a partir del trabajo efectuado por dicha fuerza. En el caso de tener fuerzas de naturaleza distinta, la expresión matemática de este trabajo será también diferente.

En definitiva, la energía mecánica de la partícula incluye tres términos de energía potencial.

11. Opción a).

Utilizamos el dato de que, a la altura H (posición A de la trayectoria del cuerpo), las energías potencial y cinética son iguales con el propósito de hallar una expresión para la altura en función de la velocidad:

$$E_c = E_p \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \cancel{m} \cdot v_A^2 = \cancel{m} \cdot g \cdot H \rightarrow H = \frac{v_A^2}{2g}$$

Aplicamos el teorema de conservación de la energía mecánica entre las posiciones A y B a una altura $\left(\frac{H}{2}\right)$, sustituimos el valor de H y despejamos la velocidad:

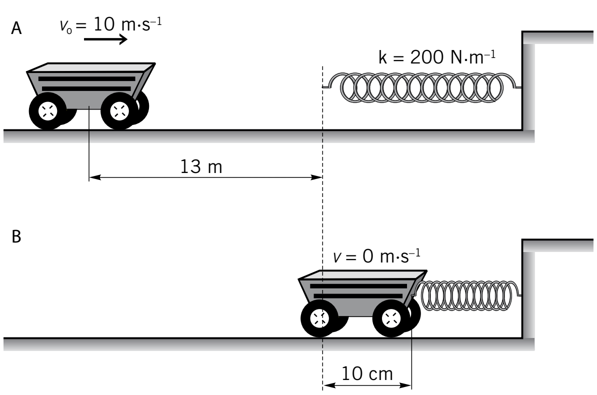
$$\Delta E_m = 0 \rightarrow E_{mA} = E_{mB} \rightarrow E_{cA} + E_{pA} = E_{cB} + E_{pB}$$

$$\frac{1}{2} \cancel{m} v_A^2 + \frac{1}{2} \cancel{m} v_A^2 = \frac{1}{2} \cancel{m} v_B^2 + \cancel{m}\, g\, \frac{H}{2}$$

$$2v_A^2 = v_B^2 + g\,H \rightarrow v_B^2 = 2v_A^2 - \cancel{g}\, \frac{v_A^2}{2\,\cancel{g}}$$

$$v_B^2 = \frac{3}{2} v_A^2 \rightarrow v_B = \sqrt{\frac{3}{2}}\, v_A = 1{,}225\, v_A$$

12. Opción d).



Aplicamos el teorema de conservación de la energía mecánica en presencia de fuerzas no conservativas entre las posiciones A y B de la figura, despejamos y hallamos el coeficiente de rozamiento:

$$\Delta E_m = W_r \rightarrow E_{mB} - E_{mA} = F_r \Delta r \cos 180°$$

$$\frac{1}{2} k x^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = -\mu \cdot m g \Delta r$$

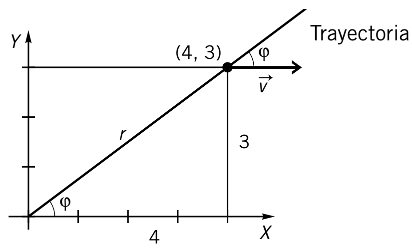
$$\mu = \frac{m v_A^2 - k x^2}{2 m g \Delta r} = \frac{1{,}0 \cdot 10^2 - 200 \cdot 0{,}10^2}{2 \cdot 1{,}0 \cdot 9{,}8 \cdot (13 + 0{,}10)} = 0{,}3817$$

13. Opción c).

Calculamos el momento angular a partir de la definición:

$$\vec{L} = \vec{r} \cdot \vec{v} \Rightarrow L = r m v \operatorname{sen}\left(\widehat{\vec{r},\vec{v}}\right) = r m v \operatorname{sen} \varphi$$

Nos ayudamos de la figura para hallar r y ϕ. Hay que tener en cuenta que, dado que la trayectoria es una línea recta, la dirección de la velocidad es la de esa línea.



Por Pitágoras:

$$r = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

Por trigonometría:

$$\operatorname{sen} \varphi = \frac{3}{r} = \frac{3}{5}$$

Sustituimos:

$$L = r m v \operatorname{sen} \varphi = 5 \cdot 0{,}1 \cdot 10 \cdot \frac{3}{5} = 3 \text{ kg·m}^2\text{·s}^{-1}$$

14. Opción a).

Determinamos el momento de inercia del niño, considerado como una masa puntual, a partir de la definición de momento de inercia. Sabemos que el dato del problema es el diámetro, así que el radio será la mitad: 1,5 m.

$$I = m \cdot r^2 = 30 \cdot 1{,}5^2 = 67{,}5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Utilizamos la ecuación fundamental de la dinámica de rotación, equivalente a la segunda ley de Newton, para hallar la aceleración angular:

$$\vec{M} = I \vec{\alpha} \rightarrow \vec{r} \times \vec{F} = I \vec{\alpha} \rightarrow r \cdot F \cdot \operatorname{sen} 90° = I \cdot \alpha$$

$$\alpha = \frac{r \cdot F}{I} = \frac{1{,}5 \cdot 40}{67{,}5} = \frac{8}{9} \text{ rad·s}^{-2}$$

El niño está describiendo un movimiento circular uniformemente acelerado. Aplicamos la ecuación de la velocidad del movimiento para calcular la velocidad angular del niño al cabo de 10 s:

$$\omega = \omega_0 + \alpha\, t = 0 + \frac{8}{9} \cdot 10 = \frac{80}{9} \text{ rad·s}^{-1}$$

Hallamos el momento angular a partir de su relación con el momento de inercia:

$$L = I\, \omega = 67{,}75 \cdot \frac{80}{9} = 600 \text{ kg·m}^2\text{·s}^{-1}$$

2# Campo gravitatorio

Nos situamos (Pág. 59)

A. Respuesta sugerida:

— Un astronauta en un paseo espacial en el exterior de la Estación Espacial Internacional (en inglés, *International Space Station* o *ISS*).

El astronauta lleva un traje especial para poder trabajar en el espacio exterior, donde las condiciones son muy diferentes al ambiente en la Tierra.

El astronauta está unido mediante una especie de cable a la ISS para no separarse de ella.

— Este tipo de misiones en el exterior de la ISS son necesarias, sobre todo, para labores de mantenimiento. Aunque su coste económico es muy elevado, los desarrollos y avances tecnológicos acaban trasladándose a la sociedad.

— ¿Cómo se llega a ser astronauta? ¿Cuántas probabilidades hay de sufrir un accidente (como se narra en algunas películas)?

B. Respuesta sugerida:

Los satélites, cuando terminan su vida útil, continúan orbitando alrededor de la Tierra sin que puedan modificar los parámetros de su órbita. Se convierten en lo que llamamos *basura espacial.*

Problemas resueltos (Págs. 84 a 86)

1. De acuerdo con la ley de gravitación universal de Newton:

$$F = \mathrm{G}\frac{M_T\,m}{r^2}$$

Despejamos la distancia:

$$F\,r^2 = \mathrm{G}M_T\,m \rightarrow r^2 = \frac{\mathrm{G}M_T\,m}{F} \rightarrow r = \sqrt{\frac{\mathrm{G}M_T\,m}{F}}$$

Sustituimos los datos del problema y calculamos:

$$r = \sqrt{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\cdot 1}{1}} = 2{,}00\cdot 10^{7}\ \mathrm{m}$$

2. De acuerdo con la ley de gravitación universal de Newton:

$$F = \mathrm{G}\frac{m_1 m_2}{r^2} = \mathrm{G}\frac{m\cdot m}{r^2} = \mathrm{G}\frac{m^2}{r^2}$$

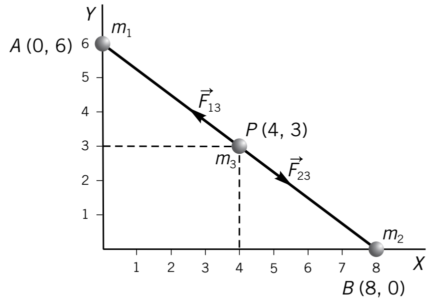
Despejamos la masa:

$$F = \mathrm{G}\frac{m^2}{r^2} \rightarrow \frac{F\,r^2}{\mathrm{G}} = m^2 \rightarrow m = \sqrt{\frac{F\,r^2}{\mathrm{G}}}$$

Sustituimos los datos del problema y calculamos:

$$m = \sqrt{\frac{3{,}75\cdot 10^{-7}\cdot 1^2}{6{,}67\cdot 10^{-11}}} = 75{,}0\ \mathrm{kg}$$

3. La colocación de las masas es la de la figura:



El punto en el que se coloca la tercera masa es el punto medio del segmento que une las dos masas. Por tanto, la distancia a cada masa es la misma.

Además, hay que tener en cuenta que las dos masas que ejercen fuerza sobre la tercera son iguales:

$$m_1 = m_2 = m$$

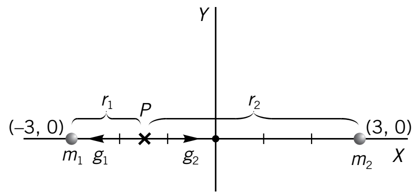
Utilizamos la ley de la gravitación universal. Al ser iguales las masas y las distancias, los módulos de las fuerzas son iguales:

$$\left.\begin{array}{l} F_{13} = \mathrm{G}\dfrac{m_1 m_3}{r^2} \rightarrow F_{13} = \mathrm{G}\dfrac{m m_3}{r^2} \\ F_{23} = \mathrm{G}\dfrac{m_2 m_3}{r^2} \rightarrow F_{23} = \mathrm{G}\dfrac{m m_3}{r^2} \end{array}\right\} \rightarrow F_{13} = F_{23}$$

Como cada masa ejerce una fuerza atractiva sobre m_3, las dos fuerzas sobre m_3 tienen el mismo módulo, igual dirección y sentido contrario. Por tanto, la fuerza neta sobre m_3 es nula.

4. De acuerdo con el principio de superposición, el campo gravitatorio total es la suma de los campos vectoriales debidos a cada una de las masas.

El vector campo gravitatorio que crea cada masa está dirigido hacia la masa. Por tanto, para que el campo gravitatorio sea nulo, el punto debe estar colocado en el segmento que une las dos masas, tal como se indica en la figura:



En el punto *P,* los campos debidos a cada masa tienen el mismo módulo y dirección, pero sentidos contrarios. Además, las distancias de cada masa al punto *P* están relacionadas:

$$r_1 + r_2 = 6 \text{ m} \rightarrow r_2 = 6 - r_1$$

Planteamos la igualdad de los módulos, sustituimos y despejamos la distancia a la masa m_1:

$$g_1 = g_2 \rightarrow \cancel{G}\frac{m_1}{r_1^2} = \cancel{G}\frac{m_2}{r_2^2} \rightarrow \frac{m_1}{r_1^2} = \frac{m_2}{(6-r_1)^2}$$

Por comodidad, denotamos por *x* la distancia. Resolvemos la ecuación:

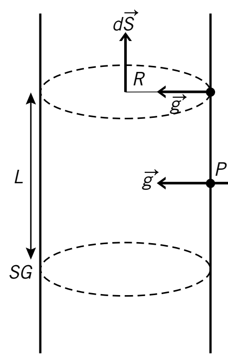
$$\frac{5}{x^2} = \frac{10}{(6-x)^2} \rightarrow 5(6-x)^2 = 10x^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow (6-x)^2 = 2x^2 \rightarrow 6 - x = \sqrt{2}\,x \rightarrow 6 = x + \sqrt{2}\,x \rightarrow$$

$$\rightarrow x(1+\sqrt{2}) = 6 \rightarrow x = \frac{6}{1+\sqrt{2}} \rightarrow x = 2{,}5 \text{ m}$$

Así pues, el punto buscado es $P(-3 + x, 0) = P(-0,5, 0)$ m.

5. Para hallar el campo gravitatorio generado por el cilindro, escogemos, por simetría, una superficie gaussiana con forma cilíndrica, de radio $r = R$, concéntrica con la distribución de masa, y longitud *L,* como se indica en la figura:



En un punto *P* de la superficie escogida, el flujo del campo gravitatorio es:

$$\Phi = \oint_{SG} \vec{g} \cdot d\vec{S} = \oint_{SG} g \cdot dS \cdot \cos\varphi$$

El cilindro está delimitado por dos bases, donde el campo gravitatorio y el vector superficie son perpendiculares, y por la superficie lateral, donde el campo y el vector superficie forman 180°.

Además, por simetría, a lo largo de la superficie lateral el campo gravitatorio es constante. Por tanto, el cálculo de la integral queda:

$$\Phi = \cancel{\int_{\text{bases}} g\,dS \cos 90°} + \int_{\text{lateral}} g\,dS \cos 180° \rightarrow$$

$$\rightarrow \Phi = -g\int_{\text{lateral}} dS$$

La integral que queda es igual a la superficie lateral total del cilindro escogido. Esta superficie es un rectángulo de lados la longitud de la circunferencia, $2\pi_r$, y la longitud del cilindro, *L:*

$$\Phi = -g \cdot 2\pi r \cdot L$$

El flujo del campo gravitatorio, aplicando el teorema de Gauss, es:

$$\Phi = -4\pi G M$$

La masa *M* en el interior del cilindro se obtiene a partir de la densidad lineal de masa:

$$\lambda = \frac{M}{L} \rightarrow M = \lambda \cdot L$$

Sustituimos la masa, igualamos las dos expresiones para el flujo y despejamos el valor del campo gravitatorio:

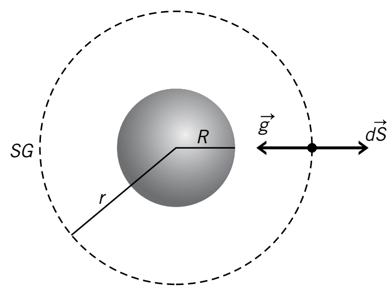
$$\Phi = -g \cdot 2\pi r \cdot L = -4\pi G \cdot \lambda L \rightarrow g = \frac{2G\lambda}{r} = \frac{4G\lambda}{d}$$

donde *d* es el diámetro del cilindro, y $d = 2r$.

Sustituimos los datos del problema:

$$g = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 4 \cdot 10{,}0}{30{,}0 \cdot 10^{-2}} = 8{,}90 \cdot 10^{-9} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

6. Para hallar el campo gravitatorio que genera una bola de billar, que es una distribución de masa esférica, escogemos, por simetría, una superficie gaussiana esférica de radio $r > R$ concéntrica con la bola de billar, como se indica en la figura:



En un punto *P* de la superficie escogida, el flujo del campo gravitatorio es:

$$\Phi = \oint_{SG} \vec{g} \cdot d\vec{S} = \oint_{SG} g \cdot dS \cdot \cos\varphi$$

Por simetría, a lo largo de toda la superficie gaussiana el campo gravitatorio es constante y forma un ángulo de 180° con el vector superficie:

$$\Phi = -g\oint_{SG} dS$$

La integral que nos queda es igual a la superficie total de la esfera:

$$\Phi = -g \cdot 4\pi r^2$$

El flujo del campo gravitatorio, aplicando el teorema de Gauss, es:

$$\Phi = -4\pi G M$$

La masa *M* en el interior es la masa de la bola de billar, que se obtiene a partir de su densidad:

$$\rho = \frac{M}{V} \rightarrow M = \rho \cdot V = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$$

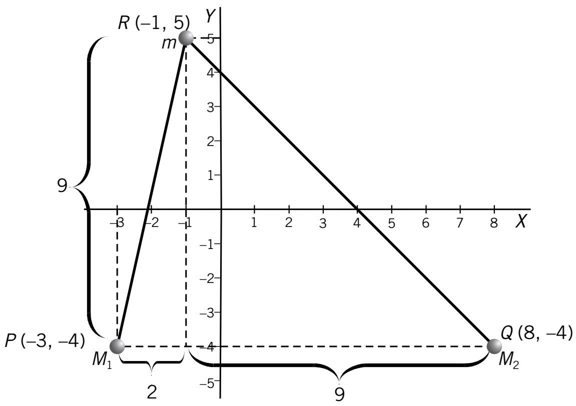
Sustituimos la masa, igualamos las dos expresiones para el flujo y despejamos el valor del campo gravitatorio:

$$\Phi = -g \cdot 4\pi r^2 = -4\pi G \cdot \rho \frac{4}{3}\pi R^3 \rightarrow g = \frac{4G\rho\pi R^3}{3r^2}$$

Sustituimos los datos del problema, prestando atención a las unidades:

$$g = \frac{4 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 3\,000 \cdot \pi \cdot 0{,}100^3}{3 \cdot 0{,}200^2} = 2{,}10 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

7. La distribución de masas es la de la figura:



a) Hallamos las distancias de cada masa al punto R por el teorema de Pitágoras:

$$r_1 = \sqrt{2^2 + 9^2} = \sqrt{85}\ \mathrm{m}$$

$$r_2 = \sqrt{9^2 + 9^2} = 9\sqrt{2}\ \mathrm{m}$$

Calculamos los potenciales creados por cada carga y aplicamos el principio de superposición:

$$V = \sum_i -\mathrm{G} \cdot \frac{M_i}{r_i}$$

$$V_R = -\mathrm{G} \cdot \frac{M_1}{r_1} - \mathrm{G} \cdot \frac{M_2}{r_2} = -\mathrm{G}\left(\frac{M_1}{r_1} + \frac{M_2}{r_2}\right)$$

$$V_R = -6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \left(\frac{3{,}6 \cdot 10^9}{\sqrt{85}} + \frac{9{,}8 \cdot 10^9}{9\sqrt{2}}\right) =$$

$$= -0{,}077\ \mathrm{J \cdot kg^{-1}}$$

b) La energía potencial se relaciona con el potencial en ese punto:

$$E_p = m \cdot V$$

Sustituimos y obtenemos su valor:

$$E_p = 140 \cdot 10^{-3} \cdot (-0{,}077) = -0{,}011\ \mathrm{J}$$

8. a) El potencial gravitatorio creado por una masa puntual a una distancia r viene dado por:

$$V = -\mathrm{G} \cdot \frac{M}{r}$$

Sustituimos y calculamos el valor del potencial en los dos puntos:

$$V_A = -\mathrm{G}\frac{M}{r_A} = -6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{1{,}2 \cdot 10^{12}}{10 \cdot 10^3} =$$

$$= -8{,}0 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{J \cdot kg^{-1}}$$

$$V_B = -\mathrm{G}\frac{M}{r_B} = -6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{1{,}2 \cdot 10^{12}}{24 \cdot 10^3} =$$

$$= -3{,}3 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{J \cdot kg^{-1}}$$

b) El trabajo que realiza el campo gravitatorio para trasladar una masa es:

$$W = -\Delta E_p = -m\,(V_B - V_A)$$

Sustituimos y calculamos:

$$W = -2{,}5 \cdot (-3{,}3 \cdot 10^{-3} + 8{,}0 \cdot 10^{-3}) = -0{,}012\ \mathrm{J}$$

El trabajo necesario para desplazar la masa es negativo. Esto significa que su movimiento no es espontáneo (se mueve de menor a mayor potencial), se hace en contra del campo gravitatorio por intervención de una fuerza externa.

9. El cuerpo escapará de la atracción terrestre si su energía mecánica es igual o superior a cero. Para ello, ha de ser lanzado con una velocidad de valor superior a la velocidad de escape a esa altura.

Sustituimos en la expresión que permite calcular la velocidad de escape:

$$v_e = \sqrt{\frac{2\mathrm{G}M_T}{r}} = \sqrt{\frac{2\mathrm{G}M_T}{R_T + h}} \rightarrow$$

$$\rightarrow v_e = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{6{,}37 \cdot 10^6 + 5 \cdot 10^6}} = 8{,}38 \cdot 10^3\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

10. a) Despejamos el radio de la Luna en la expresión de la velocidad de escape:

$$v_e = \sqrt{\frac{2\mathrm{G}M_L}{R_L}} \rightarrow v_e^2 = \frac{2\mathrm{G}M_L}{R_L} \rightarrow R_L = \frac{2\mathrm{G}M_L}{v_e^2}$$

Sustituimos los datos y calculamos:

$$R_L = \frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 7{,}40 \cdot 10^{22}}{(2{,}37 \cdot 10^3)^2} = 1{,}76 \cdot 10^6\ \mathrm{m}$$

b) El valor del campo gravitatorio en la superficie de la Luna es:

$$g_L = \mathrm{G}\frac{M_L}{R_L^2}$$

Sustituimos y calculamos:

$$g_L = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{7{,}40 \cdot 10^{22}}{(1{,}76 \cdot 10^6)^2} = 1{,}60\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

11. Tomando la órbita de la Luna como circular, calculamos la velocidad orbital:

$$v = \frac{2\pi r}{T} \rightarrow v = \frac{2 \cdot \pi \cdot 3{,}84 \cdot 10^8}{(27 \cdot 24 + 6) \cdot 3600} = 1020\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

La fuerza centrípeta responsable del movimiento circular de la Luna es la fuerza de atracción gravitatoria que la Tierra ejerce sobre la Luna. Por tanto:

$$F_g = F_c \rightarrow \mathrm{G}\frac{M_T \cancel{M_L}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{M_L}\frac{v^2}{\cancel{r}} \rightarrow M_T = \frac{v^2 r}{\mathrm{G}}$$

Sustituimos y calculamos:

$$M_T = \frac{1020^2 \cdot 3{,}84 \cdot 10^8}{6{,}67 \cdot 10^{-11}} = 6{,}05 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}$$

12. a) Sustituimos en la expresión de la velocidad orbital:

$$v = \sqrt{G\frac{M_T}{r}} = \sqrt{G\frac{M_T}{R_T + h}} \rightarrow$$

$$\rightarrow v = \sqrt{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5{,}98 \cdot 10^{24}}{(6{,}37 + 0{,}5) \cdot 10^6}} = 7\,620 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

b) Utilizamos las ecuaciones del MCU para calcular el período del movimiento del satélite:

$$v = \frac{2\pi r}{T} \rightarrow T = \frac{2\pi r}{v} \rightarrow T = \frac{2\pi \cdot 6{,}87 \cdot 10^6}{7\,620} = 5\,660 \text{ s}$$

$$T = 5\,660 \text{ s} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3\,600 \text{ s}} = 1{,}57 \text{ h}$$

Ejercicios y problemas (Págs. 87 a 91)

1 LEY DE GRAVITACIÓN UNIVERSAL Pág. 87

13. Según la ley de gravitación universal, la fuerza que ejerce la Tierra sobre un cuerpo es proporcional a la masa, pero la intensidad del campo gravitatorio debido a la Tierra es la fuerza por unidad de masa. Por tanto, la aceleración de la gravedad, con la que caen los cuerpos, solo depende de la masa y el radio de la Tierra, no de la masa del cuerpo:

$$F = G\frac{M_T m}{R_T^2} = gm \rightarrow g = G\frac{M_T}{R_T^2}$$

14. La fuerza gravitatoria con la que la Tierra atrae al satélite está dirigida hacia el centro del planeta y es la fuerza centrípeta responsable del movimiento del satélite en órbita.

a) En una órbita circular, el satélite se encuentra siempre a la misma distancia del centro y, por tanto, su energía potencial toma el mismo valor en toda la órbita:

$$E_p = -G\frac{M_T m}{r}$$

Como el trabajo es igual a la variación de la energía potencial, $W = -\Delta E_p$, en este caso, el trabajo es nulo.

b) Aunque la órbita sea elíptica, la fuerza gravitatoria no deja de ser una fuerza central y, por tanto, conservativa. En un campo conservativo, el trabajo a lo largo de una trayectoria cerrada es nulo.

15. De acuerdo con la ley de gravitación universal de Newton:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Despejamos la constante de gravitación universal:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \rightarrow Fr^2 = G \cdot m_1 m_2 \rightarrow G = \frac{Fr^2}{m_1 m_2}$$

Sustituimos los datos del problema y calculamos:

$$G = \frac{1{,}3 \cdot 10^{-10} \cdot (4{,}0 \cdot 10^{-2})^2}{0{,}80 \cdot 4{,}0 \cdot 10^{-3}} = 6{,}5 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-1}$$

16. De acuerdo con la ley de gravitación universal, la fuerza que actúa sobre las masas es igual en módulo y dirección, y sentido hacia la otra masa, ya que es una fuerza atractiva:

$$F_{12} = F_{21} = F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Sustituimos los datos del problema:

$$F = G\frac{m \cdot 2m}{d^2} = \frac{2Gm^2}{d^2}$$

La aceleración de cada partícula es diferente, ya que sus masas son distintas:

Sobre la masa m: $a_1 = \dfrac{F}{m} = \dfrac{\dfrac{2Gm^{\cancel{2}}}{d^2}}{\cancel{m}} = \dfrac{2Gm}{d^2}$

Sobre la masa $2m$: $a_2 = \dfrac{F}{2m} = \dfrac{\dfrac{\cancel{2}Gm^{\cancel{2}}}{d^2}}{\cancel{2}\,\cancel{m}} = \dfrac{Gm}{d^2}$

17. Inicialmente, la fuerza de atracción entre las masas es:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \rightarrow F = G\frac{m \cdot m}{r^2} = G\frac{m^2}{r^2}$$

Cuando las masas se reducen, la fuerza viene dada por:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \rightarrow F = G\frac{\frac{m}{2} \cdot \frac{m}{8}}{r'^2} = G\frac{m^2}{16r'^2}$$

La fuerza es 16 veces inferior.

Igualamos las dos expresiones de la fuerza y despejamos el valor del radio en la segunda situación:

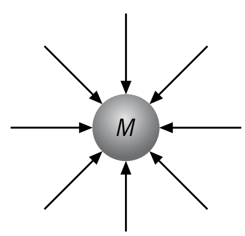
$$\cancel{G}\frac{\cancel{m^2}}{r^2} = \cancel{G}\frac{\cancel{m^2}}{16r'^2} \rightarrow r^2 = 16r'^2 \rightarrow r'^2 = \frac{r^2}{16} = \left(\frac{r}{4}\right)^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow r' = \frac{r}{4}$$

Por tanto, hay que acercarlas hasta que estén a una distancia igual a la cuarta parte de la que las separaba inicialmente.

2 ESTUDIO DEL CAMPO GRAVITATORIO Págs. 87 a 91

18. Las líneas del campo gravitatorio se representan en la figura:



La energía potencial gravitatoria de la masa m es:

$$E_p = -G\frac{Mm}{r}$$

La partícula, al trasladarse a un punto a menor distancia, está disminuyendo su energía potencial.

19. La fuerza con la que el cuerpo es atraído por la Tierra va dirigida en el sentido en el que la disminución de la energía potencial gravitatoria del cuerpo es máxima. Por tanto, cuando el cuerpo se aleja de la superficie terrestre, su energía potencial está aumentando.

También puede razonarse que, como la energía potencial gravitatoria de un cuerpo ligado a la Tierra es negativa, al aumentar el radio, su valor también se incrementa.

20. a) Si la partícula se ha movido hacia un punto donde el potencial gravitatorio es mayor, entonces el trabajo del campo gravitatorio es:

$$W = -\Delta E_p = -m\left(V_B - V_A\right) < 0$$

Un trabajo negativo implica la actuación de una fuerza externa, en contra del campo, que aleja la partícula de la masa puntual *M*.

b) En el punto *A* de partida, la partícula tiene energía cinética y potencial, cuya suma es el valor de la energía mecánica de la partícula:

$$E_m = E_c + E_p$$

Como el campo gravitatorio es un campo conservativo, durante la trayectoria de la partícula su energía mecánica total permanece constante, siempre y cuando no exista otra fuerza externa.

En su desplazamiento hacia valores mayores del potencial gravitatorio, la energía potencial de la partícula aumenta. Por tanto, la energía cinética va disminuyendo en la misma cantidad:

$$\Delta E_m = 0 \rightarrow \Delta E_p + \Delta E_c = 0 \rightarrow \Delta E_c = -\Delta E_p$$

21. A una distancia *r* del centro de la Tierra, la velocidad orbital es:

$$v = \sqrt{G\frac{M}{r}}$$

Y la velocidad de escape a esa misma distancia:

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

La relación entre estas dos velocidades es:

$$\frac{v_e}{v} = \frac{\sqrt{\frac{2GM}{r}}}{\sqrt{G\frac{M}{r}}} = \sqrt{2} \rightarrow v_e = \sqrt{2}\,v \rightarrow v_e > v$$

Independientemente del valor del radio de la órbita, la velocidad de escape es siempre mayor, lógicamente.

22. a) La velocidad orbital de los satélites viene dada por:

$$v = \sqrt{G\frac{M}{r}}$$

A mayor valor del radio, menor es la velocidad orbital. Por tanto, tiene mayor velocidad el satélite en la órbita de menor radio.

b) La energía mecánica de los satélites viene dada por:

$$E_m = E_c + E_p = \frac{E_p}{2} = -G\frac{Mm}{2r}$$

A mayor valor del radio, mayor es la energía mecánica (se toma como nulo su valor en el infinito).

23. El valor real de la intensidad del campo gravitatorio en la superficie terrestre viene dado por la expresión:

$$g = G\frac{M_T}{R_T^2}$$

Si su radio se reduce a la mitad, el valor es:

$$g' = G\frac{M_T}{\left(\frac{R_T}{2}\right)^2}$$

Relacionamos estos dos valores:

$$\frac{g'}{g} = \frac{\cancel{G}\dfrac{\cancel{M_T}}{\dfrac{\cancel{R^2}}{4}}}{\cancel{G}\dfrac{\cancel{M_T}}{\cancel{R_T^2}}} = 4 \rightarrow g' = 4g$$

24. El valor del campo gravitatorio en la superficie de Mercurio viene dado por la expresión:

$$g = G\frac{M}{R^2}$$

Suponiendo que el planeta es esférico, relacionamos la masa con la densidad:

$$\rho = \frac{M}{V} \rightarrow M = \rho \cdot V = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$$

Sustituimos este resultado en el campo gravitatorio y despejamos la densidad media:

$$g = G\frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^{\cancel{3}}}{\cancel{R^2}} \rightarrow \rho = \frac{3g}{4\pi G R}$$

Sustituimos los datos y calculamos:

$$\rho = \frac{3 \cdot 3{,}7}{4\pi \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 2{,}44 \cdot 10^6} = 5{,}4 \cdot 10^3\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$$

25. El valor del campo gravitatorio en la superficie del planeta viene dado por la expresión:

$$g = G\frac{M}{R^2}$$

Suponiendo que el planeta es esférico, relacionamos la masa con la densidad:

$$\rho = \frac{M}{V} \rightarrow M = \rho \cdot V = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$$

Sustituimos este resultado en el campo gravitatorio:

$$g = G\frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^{\cancel{3}}}{\cancel{R^2}} \rightarrow g = \frac{4}{3}\pi G\rho R$$

Sustituimos los datos y calculamos:

$$g = \frac{4}{3}\pi \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 1330 \cdot 7{,}15 \cdot 10^{7} = 26{,}6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

26. De acuerdo con la ley de gravitación universal, la fuerza que ejerce la Tierra sobre una masa puntual *m* que se encuentra a una distancia *r* de su centro es:

$$F = G\frac{M_T m}{r^2} = G\frac{M_T m}{(R_T + h)^2}$$

La intensidad del campo gravitatorio se define como la fuerza que se ejerce sobre la unidad de masa. Su valor es:

$$g = \frac{F}{m} = G\frac{M_T}{r^2} = G\frac{M_T}{(R_T + h)^2}$$

Despejamos la distancia *r*:

$$r^2 = \frac{GM_T}{g} \rightarrow r = \sqrt{\frac{GM_T}{g}}$$

Sustituimos los datos:

$$r = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{2{,}0}} = 1{,}41 \cdot 10^{7} \text{ m}$$

Restamos el valor del radio de la Tierra para hallar la altura sobre la superficie terrestre:

$$h = r - R_T = 1{,}4 \cdot 10^{7} - 6{,}37 \cdot 10^{6} = 7{,}7 \cdot 10^{6} \text{ m}$$

27. Obtenemos el radio del planeta a partir de la medida de su circunferencia ecuatorial:

$$L = 2\pi R \rightarrow R = \frac{L}{2\pi} = \frac{2{,}0 \cdot 10^{8}}{2\pi} = 3{,}2 \cdot 10^{7} \text{ m}$$

Despejamos la masa del planeta en la expresión del campo gravitatorio en la superficie del planeta:

$$g = G\frac{M}{R^2} \rightarrow M = \frac{gR^2}{G}$$

Sustituimos los datos y calculamos:

$$M = \frac{3{,}0 \cdot (3{,}2 \cdot 10^{7})^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11}} = 4{,}6 \cdot 10^{25} \text{ kg}$$

28. En primer lugar, utilizamos el dato de que los dos planetas tienen la misma densidad para hallar la relación entre sus masas:

$$\rho_P = \rho_T \rightarrow \frac{M_P}{\cancel{\frac{4}{3}\pi} R_P^3} = \frac{M_T}{\cancel{\frac{4}{3}\pi} R_T^3} \rightarrow$$

$$\rightarrow M_P = \left(\frac{R_P}{R_T}\right)^3 M_T = \left(\frac{\frac{\cancel{R_T}}{2}}{\cancel{R_T}}\right)^3 M_T = \frac{M_T}{8}$$

Relacionamos los valores de la gravedad en la superficie de los dos planetas:

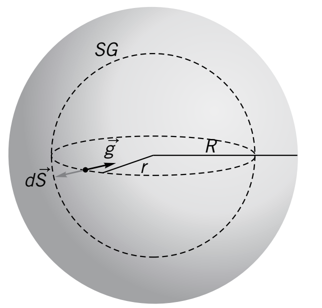
$$g = G\frac{M}{R^2} \rightarrow \frac{g_P}{g_T} = \frac{\cancel{G}\frac{M_P}{R_P^2}}{\cancel{G}\frac{M_T}{R_T^2}} = \frac{M_P}{M_T} \cdot \left(\frac{R_T}{R_P}\right)^2$$

Sustituimos las conocidas relaciones entre la masa y el radio:

$$\frac{g_P}{g_T} = \frac{1}{8} \cdot 2^2 \rightarrow g_P = \frac{1}{2} \cdot 9{,}81 = 4{,}91 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

que es la mitad del valor que tiene realmente.

29. Para hallar el campo gravitatorio de la Tierra, tomada como una esfera de densidad uniforme, escogemos, por simetría, una superficie gaussiana esférica de radio $r < R$ concéntrica con la Tierra, como se indica en la figura:



En un punto *P* de la superficie escogida, interior a la Tierra, el flujo del campo gravitatorio es:

$$\Phi = \oint_{SG} \vec{g} \cdot d\vec{S} = \oint_{SG} g \cdot dS \cdot \cos\varphi$$

Por simetría, a lo largo de toda la superficie gaussiana, el campo gravitatorio es constante y forma un ángulo de 180° con el vector superficie:

$$\Phi = -g\oint_{SG} dS$$

La integral que nos queda es igual a la superficie total de la esfera:

$$\Phi = -g \cdot 4\pi r^2$$

El flujo del campo gravitatorio, aplicando el teorema de Gauss, es:

$$\Phi = -4\pi G M$$

La masa *M* en el interior de la superficie gaussiana se halla teniendo en cuenta que la densidad es constante:

$$\rho = \rho' \rightarrow \frac{M_T}{\cancel{\frac{4}{3}}\pi R_T^3} = \frac{M}{\cancel{\frac{4}{3}}\pi r^3} \rightarrow M = \frac{r^3}{R_T^3} M_T$$

Sustituimos la masa, igualamos las dos expresiones para el flujo y despejamos el valor del campo gravitatorio:

$$\Phi = -g \cdot 4\pi r^2 = -4\pi G \cdot \frac{r^3}{R_T^3} M_T \rightarrow g = \frac{GM_T}{R_T^3} r$$

Se quiere que este valor de la aceleración de la gravedad suponga una reducción de un 1 % respecto al valor en la superficie. Por tanto, este valor ha de ser el 99 % del valor en la superficie.

Si tenemos en cuenta que la aceleración en la superficie es:

$$g_0 = \frac{GM_T}{R_T^3} R_T$$

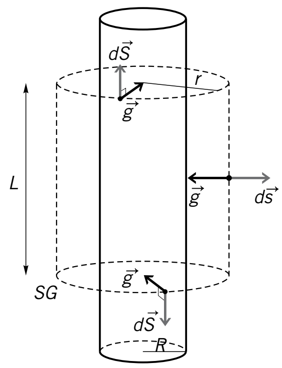
entonces, la relación entre las aceleraciones nos da la distancia al centro de la Tierra:

$$\frac{g}{g_0} = \frac{\cancel{\frac{GM_T}{R_T^3}}\, r}{\cancel{\frac{GM_T}{R_T^3}}\, R_T} \rightarrow \frac{0{,}99\, \cancel{g_0}}{\cancel{g_0}} = \frac{r}{R_T} \rightarrow r = 0{,}99 R_T$$

La profundidad pedida es la diferencia entre el radio terrestre y este valor:

$$h = R_T - r = R_T - 0{,}99 R_T = 0{,}01 R_T = 6 \cdot 10^4 \text{ m}$$

30. Para hallar el campo gravitatorio generado por el cilindro, escogemos, por simetría, una superficie gaussiana con forma cilíndrica, de radio $r > R$, concéntrica con la distribución de masa, y longitud L, como se indica en la figura:



En un punto P de la superficie escogida, el flujo del campo gravitatorio es:

$$\Phi = \oint_{SG} \vec{g} \cdot d\vec{S} = \oint_{SG} g \cdot dS \cdot \cos\varphi$$

El cilindro está delimitado por dos bases, donde el campo gravitatorio y el vector superficie son perpendiculares, y por la superficie lateral, donde el campo y el vector superficie forman 180°.

Además, por simetría, a lo largo de la superficie lateral, el campo gravitatorio es constante. Por tanto, el cálculo de la integral queda:

$$\Phi = \cancel{\int_{\text{bases}} g\, dS \cos 90°} + \int_{\text{lateral}} g\, dS \cos 180° \rightarrow$$

$$\rightarrow \Phi = -g \int_{\text{lateral}} dS$$

La integral que nos queda es igual a la superficie lateral total del cilindro escogido. Esta superficie es un rectángulo de lados la longitud de la circunferencia, $2\pi r$, y la longitud del cilindro, L:

$$\Phi = -g \cdot 2\pi r \cdot L$$

El flujo del campo gravitatorio, aplicando el teorema de Gauss, es:

$$\Phi = -4\pi G M$$

La masa M en el interior del cilindro se obtiene a partir de la densidad de masa:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\pi R^2 L} \rightarrow M = \rho \cdot \pi R^2 L$$

Sustituimos la masa, igualamos las dos expresiones para el flujo y despejamos el valor del campo gravitatorio:

$$\Phi = -g \cdot 2\pi r \cdot L = -4\pi^2 G\rho R^2 L \rightarrow g = 2\pi G\rho R^2 \cdot \frac{1}{r}$$

El valor en la superficie del cilindro es:

$$g_0 = 2\pi G\rho R^2 \cdot \frac{1}{R}$$

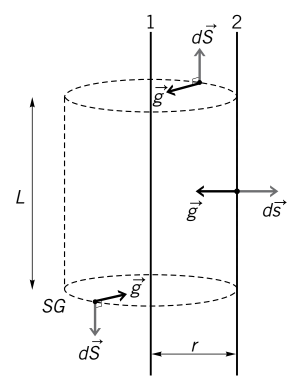
Relacionamos las dos expresiones para el campo gravitatorio, despejamos la distancia, sustituimos y calculamos:

$$\frac{g}{g_0} = \frac{\cancel{2\pi G\rho R^2} \cdot \frac{1}{r}}{\cancel{2\pi G\rho R^2} \cdot \frac{1}{R}} \rightarrow \frac{\frac{1}{2}\cancel{g_0}}{\cancel{g_0}} = \frac{R}{r} \rightarrow r = 2R$$

$$r = 2 \cdot 10 = 20 \text{ cm}$$

31. No podemos usar la ley de gravitación universal, puesto que los hilos no son masas puntuales. En su lugar, calculamos el campo gravitatorio haciendo uso del teorema de Gauss, tomando los cables como cilindros de radio R mucho menor que su longitud.

Para hallar el campo gravitatorio generado por uno de los cables, escogemos, por simetría, una superficie gaussiana con forma cilíndrica, de radio $r > R$, igual a la distancia entre cables, concéntrica con la distribución de masa, y longitud L, como se indica en la figura:



En un punto P de la superficie escogida, el flujo del campo gravitatorio es:

$$\Phi = \oint_{SG} \vec{g} \cdot d\vec{S} = \oint_{SG} g \cdot dS \cdot \cos\varphi$$

El cilindro está delimitado por dos bases, donde el campo gravitatorio y el vector superficie son perpendiculares, y por la superficie lateral, donde el campo y el vector superficie forman 180°.

Además, por simetría, a lo largo de la superficie lateral, el campo gravitatorio es constante. Por tanto, el cálculo de la integral queda:

$$\Phi = \cancel{\int_{\text{bases}} g\,dS \cos 90°} + \int_{\text{lateral}} g\,dS \cos 180° \rightarrow$$

$$\rightarrow \Phi = -g \int_{\text{lateral}} dS$$

La integral que nos queda es igual a la superficie lateral total del cilindro escogido. Esta superficie es, desplegada, equivalente a la de un rectángulo de lados la longitud de la circunferencia, $2\pi r$, y la longitud del cilindro, L:

$$\Phi = -g \cdot 2\pi r \cdot L$$

El flujo del campo gravitatorio, aplicando el teorema de Gauss, es:

$$\Phi = -4\pi G M$$

La masa M en el interior del cilindro se obtiene a partir de la densidad lineal de masa:

$$\lambda = \frac{M}{L} \rightarrow M = \lambda \cdot L$$

Sustituimos la masa, igualamos las dos expresiones para el flujo y despejamos el valor del campo gravitatorio:

$$\Phi = -g \cdot 2\pi r \cdot L = -4\pi G \cdot \lambda L \rightarrow g = \frac{2G\lambda}{r}$$

Cada cable crea, a la distancia r a la que se encuentra el otro cable, un campo gravitatorio de este valor. La fuerza que se ejerce sobre el cable allí colocado es:

$$F = m \cdot g$$

donde m es la masa del segundo cable, que se obtiene por su relación con la densidad de masa:

$$F = g \cdot \lambda \cdot L$$

Como se pide la fuerza por unidad de longitud:

$$\frac{F}{L} = \frac{g\lambda \cancel{L}}{\cancel{L}} \rightarrow \frac{F}{L} = \frac{2G\lambda^2}{r}$$

sustituimos los datos del problema y calculamos:

$$\frac{F}{L} = \frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 7{,}0^2}{20 \cdot 10^{-2}} = 3{,}3 \cdot 10^{-8}\ \text{N} \cdot \text{m}^{-1}$$

32. Si la Tierra fuese homogénea, el campo gravitatorio en su interior dependería linealmente del radio (véase el Ejemplo 3, página 69):

$$g = \frac{GM_T}{R_T^2} r$$

Por tanto, la fuerza gravitatoria sobre el cuerpo sería también proporcional a la distancia al centro de la Tierra.

De esta forma, cuando se dejara caer el cuerpo en un polo en la superficie de la Tierra, la fuerza tendría su valor máximo. Conforme el cuerpo caería, esta iría disminuyendo, hasta anularse cuando aquel pasara por el centro de la Tierra. El cuerpo continuaría cayendo, pero ahora la fuerza gravitatoria iría aumentando y se opondría a su movimiento, hasta que el cuerpo llegase al otro polo, donde la fuerza volvería a alcanzar su valor máximo y la velocidad del objeto sería nula.

En resumen, el cuerpo describiría un movimiento armónico simple.

Para hallar el período del movimiento, partimos de la expresión de la fuerza gravitatoria:

$$F = mg = \frac{GM_T m}{R_T{}^3} r = kr$$

donde hemos llamado k a la constante de proporcionalidad.

El período del movimiento armónico simple viene dado por:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{\cancel{m}}{\dfrac{GM_T\,\cancel{m}}{R_T^3}}} = 2\pi\sqrt{\frac{R_T^3}{GM_T}}$$

Sustituimos los datos y calculamos:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(6{,}37 \cdot 10^6)^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}} = 5\,060\ \text{s} = 1{,}40\ \text{h}$$

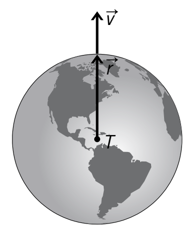
33. El momento angular es:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \rightarrow L = r\,m\,v \cdot \text{sen}\ \alpha$$

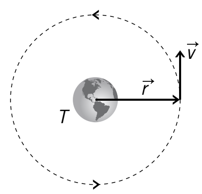
siendo α el ángulo entre la trayectoria y la distancia al centro de la Tierra.

a) En este caso, representado en la figura, la velocidad y el radio forman un ángulo de 0°.

El momento angular es nulo.



b) En este caso, representado en la figura, la velocidad y el radio forman un ángulo de 90°.



La velocidad del satélite en su órbita es:

$$v = \sqrt{G\frac{M_T}{R_T + h}} \rightarrow$$

$$\rightarrow v = \sqrt{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5{,}98 \cdot 10^{24}}{6{,}37 \cdot 10^6 + 6 \cdot 10^5}} =$$

$$= 7{,}57 \cdot 10^3\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

El módulo del momento angular es:

$$L = mvr = 1000 \cdot 7{,}57 \cdot 10^3 \cdot \left(6{,}97 \cdot 10^6\right) =$$

$$= 5{,}27 \cdot 10^{13}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

34. Datos: $r_T = 1{,}50 \cdot 10^{11}$ m; $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; $R_T = 6{,}37 \cdot 10^6$ m

El momento angular del movimiento orbital de la Tierra es:

$$\vec{L} = \vec{r}_T \times \vec{p}_T = \vec{r}_T \times (M_T \cdot \vec{v}_T)$$

Al tratarse de una órbita circular, $\vec{r}_T$ es perpendicular a $\vec{v}_T$, y los módulos de $\vec{r}_T$ y $\vec{v}_T$ permanecen constantes en toda la órbita. El módulo de $\vec{L}$ es:

$$L = r_T \cdot M_T \cdot v_T$$

La velocidad lineal depende del radio de la órbita circular y de su período, *T:*

$$v_T = \frac{2\pi r_T}{T}$$

Sustituimos la expresión de v_T en la expresión del módulo de $\vec{L}$:

$$L = r_T \cdot M_T \cdot \frac{2\pi r_T}{T} = \frac{2\pi M_T \cdot r_T^2}{T}$$

Sabemos que el período de una órbita terrestre es de 1 año: $T = 1$ año $= 3{,}15 \cdot 10^7$ s

Al sustituir las magnitudes por sus valores numéricos, obtenemos el módulo del momento angular orbital:

$$L = \frac{2\pi \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg} \cdot (1{,}50 \cdot 10^{11}\ \text{m})^2}{3{,}15 \cdot 10^7\ \text{s}}$$

$$L = 2{,}68 \cdot 10^{40}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

La dirección de $\vec{L}$ es la perpendicular al plano de la órbita terrestre. Su sentido es hacia arriba debido a que la Tierra se mueve alrededor del Sol en sentido antihorario si se observa por encima de los polos norte de la Tierra y el Sol.

— Calculamos el momento angular asociado a la rotación de la Tierra sobre sí misma:

$$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}$$

Hallamos primero el módulo de la velocidad angular:

$\omega = \dfrac{2\pi}{T_{eje}}$, donde T_{eje} es el período de rotación de la Tierra alrededor de su eje, igual a 1 día:

$$T_{eje} = 1\ \text{día} = 8{,}64 \cdot 10^4\ \text{s}$$

Teniendo en cuenta la expresión del momento de inercia, *I*, de una esfera, resulta:

$$L = I \cdot \omega = \frac{2}{5} M_T R_T^2 \cdot \omega$$

$$L = \frac{2}{5} M_T R_T^2 \cdot \frac{2\pi}{T_{eje}}$$

Al sustituir los valores, se obtiene:

$$L = \frac{2}{5} \frac{5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg} \cdot (6{,}37 \cdot 10^6\ \text{m})^2 \cdot 2\pi}{8{,}64 \cdot 10^4\ \text{s}}$$

$$L = 7{,}06 \cdot 10^{33}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

En el caso de la Tierra, el momento angular de la rotación sobre sí misma es siete órdenes de magnitud menor que el correspondiente a su rotación alrededor del Sol.

35. Datos: $r_p = 0{,}59$ UA; $v_p = 5{,}5 \cdot 10^4\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$; $v_a = 9{,}3 \cdot 10^2\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

En el caso de un cuerpo celeste que describe una órbita elíptica alrededor de una estrella, el perihelio y el afelio están situados en el eje mayor de la elipse, mientras que la estrella se encuentra en uno de los dos focos de la elipse. Por tanto, en el perihelio y en el afelio, la velocidad lineal del cuerpo que describe la órbita elíptica es perpendicular a su vector de posición, con origen en la estrella. En consecuencia, el ángulo entre el vector de posición $\vec{r}$ y la velocidad lineal del cuerpo que está orbitando, $\vec{v}$, es: $\alpha = 90°$. Por conservación del momento angular, se verifica que:

$$m \cdot r_A \cdot v_A \cdot \text{sen}\ 90° = m \cdot r_P \cdot v_P \cdot \text{sen}\ 90°$$

Es decir: $\dfrac{v_A}{v_P} = \dfrac{r_P}{r_A}$

La distancia del cometa Halley al Sol en el afelio es:

$$r_A = \frac{r_P \cdot v_P}{v_A}$$

Al sustituir valores, resulta:

$$r_A = \frac{0{,}59\ \text{UA} \cdot 5{,}5 \cdot 10^4\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}}{9{,}3 \cdot 10^2\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}} = 35\ \text{UA}$$

$$r_A = 35\ \text{UA} = 35 \cdot 1{,}496 \cdot 10^{11}\ \text{m} = 5{,}2 \cdot 10^{12}\ \text{m}$$

36. Para hallar la energía potencial gravitatoria del sistema formado por tres partículas de masa *m* situadas en los vértices de un triángulo equilátero de lado *l,* debemos calcular el trabajo hecho por la fuerza gravitatoria al crearse este sistema. Y hay que tener en cuenta la relación entre el trabajo, *W,* al desplazar una partícula con masa desde un punto *A* hasta un punto *B* y la diferencia de energía potencial gravitatoria, E_p, entre ambos puntos:

$$W_{A \to B} = -(E_{pB} - E_{pA})$$

Para crear el sistema de las tres partículas, suponemos que inicialmente están muy alejadas entre sí, por lo que su energía potencial inicial es nula. Empezamos con la primera partícula de masa *m*. Al trasladarla desde su posición inicial hasta uno de los vértices del triángulo, la fuerza gravitatoria no realiza trabajo, pues no hay más partículas en sus proximidades. A continuación, trasladamos la segunda partícula de masa *m* hasta uno de los dos vértices restantes. En este caso, la energía adquirida, considerando que el origen de energía potencial gravitatorio está en el infinito ($E_{pA} = 0$), es:

$$-G\frac{m \cdot m}{l}$$

Esta es la energía gravitatoria del sistema formado por dos partículas de masa *m* separadas entre sí una distancia *l*. Ahora solo queda sumar el incremento de energía gravitatoria al trasladar la tercera partícula de masa *m* hasta el tercer vértice del triángulo a una distancia *l* de cada una de las dos masas anteriores. Este incremento es igual al trabajo realizado por la fuerza gravitatoria, cambiado de signo:

$$W = \int_A^B \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2\right) \cdot d\vec{r} = \int_A^B \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} + \int_A^B \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}$$

En la anterior expresión, se ha aplicado el principio de superposición: la fuerza gravitatoria sobre la tercera partícula es la suma de las fuerzas ejercidas por la primera y la segunda. En cada una de las dos integrales, la fuerza y el desplazamiento diferencial, $d\vec{r}$, tienen la misma dirección, por lo que para cada una se cumple que:

$$\int_A^B \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} = \int_\infty^l -G\frac{m \cdot m}{r^2} \cdot dr = \left[G\frac{m \cdot m}{r}\right]_\infty^l =$$

$$= G\frac{m \cdot m}{l} - 0 = G\frac{m \cdot m}{l}$$

Así, pues:

$$-W = -\left(G\frac{m \cdot m}{l} + G\frac{m \cdot m}{l}\right) = -2G\frac{m \cdot m}{l}$$

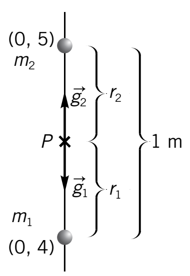
Y la energía del sistema de las tres partículas de masa m separadas entre sí una distancia l es:

$$E_{p\,\text{total}} = -G\frac{m \cdot m}{l} + \left(-2G\frac{m \cdot m}{l}\right)$$

$$E_{p\,\text{total}} = -\frac{3Gm^2}{l}$$

37. a) De acuerdo con el principio de superposición, el campo gravitatorio total es la suma de los campos vectoriales debidos a cada una de las masas.

El vector campo gravitatorio que crea cada masa está dirigido hacia la masa. Por tanto, para que el campo gravitatorio sea nulo, el punto ha de estar colocado en el segmento que une las dos masas, tal como se indica en la figura:



En el punto P, los campos debidos a cada masa tienen el mismo módulo y la misma dirección, pero sentidos contrarios. Además, las distancias de cada masa al punto P están relacionadas:

$$r_1 + r_2 = 1\ m \rightarrow r_2 = 1 - r_1$$

Planteamos la igualdad de los módulos:

$$g_1 = g_2 \rightarrow \cancel{G}\frac{m_1}{r_1^2} = \cancel{G}\frac{m_2}{r_2^2} \rightarrow \frac{m_1}{r_1^2} = \frac{m_2}{(1-r_1)^2}$$

Por comodidad, denotamos por x la distancia r_1. Resolvemos la ecuación:

$$\frac{5}{x^2} = \frac{10}{(1-x)^2} \rightarrow 5(1-x)^2 = 10x^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow (1-x)^2 = 2x^2 \rightarrow 1 - x = \sqrt{2}\,x \rightarrow 1 = x + \sqrt{2}\,x \rightarrow$$

$$\rightarrow x(1+\sqrt{2}) = 1 \rightarrow x = \frac{1}{1+\sqrt{2}} = 0{,}41\ \text{m}$$

El punto buscado es $P(0, 4 + x) = P(0, 4{,}41)$.

b) Calculamos los potenciales en cada punto aplicando el principio de superposición:

$$V = \sum_i -G \cdot \frac{m_i}{r_i}$$

En el origen de coordenadas:

$$V_A = -G \cdot \frac{m_1}{r_1} - G \cdot \frac{m_2}{r_2} = -G\left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2}\right)$$

$$V_A = -6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \left(\frac{5}{4} + \frac{10}{5}\right) = -2{,}2 \cdot 10^{-10}\ \text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{kg}^{-1}$$

Para calcular el potencial en el punto $B(3, 4)$, calculamos por el teorema de Pitágoras la distancia al punto B de la masa m_2:

$$r_2 = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}\ \text{m}$$

$$V_B = -G \cdot \frac{m_1}{r_1} - G \cdot \frac{m_2}{r_2} = -G\left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2}\right)$$

$$V_B = -6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \left(\frac{5}{3} + \frac{10}{\sqrt{10}}\right) =$$

$$= -3{,}2 \cdot 10^{-10}\ \text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{kg}^{-1}$$

El trabajo necesario para desplazar una masa en el seno de un campo gravitatorio es:

$$W = -\Delta E_p = -m(V_B - V_A)$$

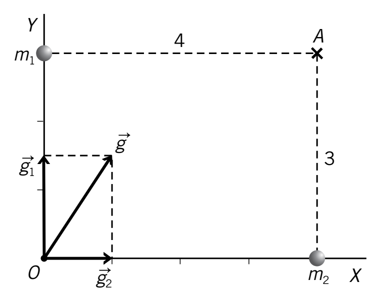
Sustituimos y calculamos el trabajo:

$$W = -2 \cdot (-3{,}2 \cdot 10^{-10} + 2{,}2 \cdot 10^{-10}) = 2{,}1 \cdot 10^{-10}\ \text{J}$$

El trabajo necesario para desplazar la masa es positivo. Esto significa que su movimiento es espontáneo (se mueve de mayor a menor potencial), lo realiza el campo gravitatorio.

38. a) De acuerdo con el principio de superposición, el campo gravitatorio total es la suma de los campos vectoriales debidos a cada una de las masas.

El vector campo gravitatorio que crea cada masa está dirigido hacia la masa. Por tanto, la representación del campo gravitatorio en el origen es la de la figura:



Calculamos el módulo del campo gravitatorio creado por cada masa:

$$g_1 = G\frac{m_1}{r_1^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{10{,}0}{3^2} = 7{,}42 \cdot 10^{-11}\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$g_2 = G\frac{m_2}{r_2^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5{,}0}{4^2} = 2{,}1 \cdot 10^{-11}\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

En la figura, podemos ver que estos campos se dirigen según los ejes *X* e *Y*. Por tanto, los valores calculados son las componentes cartesianas del vector campo gravitatorio:

$$\vec{g} = (2{,}1 \cdot 10^{-11}\vec{i} + 7{,}42 \cdot 10^{-11}\vec{j})\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

b) Calculamos los potenciales en cada punto aplicando el principio de superposición:

$$V = \sum_i -G \cdot \frac{m_i}{r_i}$$

En el punto *A*(4, 3):

$$V_A = -G \cdot \frac{m_1}{r_1} - G \cdot \frac{m_2}{r_2} = -G\left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2}\right)$$

$$V_A = -6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \left(\frac{10}{4} + \frac{5}{3}\right) = -2{,}8 \cdot 10^{-10}\ \text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{kg}^{-1}$$

En el origen *B*(0, 0):

$$V_B = -G \cdot \frac{m_1}{r_1} - G \cdot \frac{m_2}{r_2} = -G\left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2}\right)$$

$$V_B = -6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \left(\frac{10}{3} + \frac{5}{4}\right) = -3{,}1 \cdot 10^{-10}\ \text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{kg}^{-1}$$

El trabajo necesario para desplazar una masa en el seno de un campo gravitatorio es:

$$W = -\Delta E_p = -m(V_B - V_A)$$

Sustituimos y calculamos el trabajo:

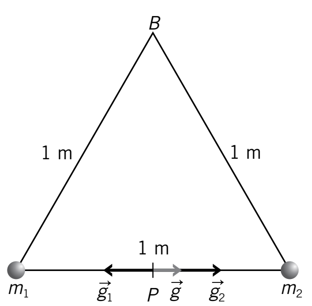
$$W = -0{,}5(-3{,}1 \cdot 10^{-10} + 2{,}8 \cdot 10^{-10}) = 1{,}4 \cdot 10^{-11}\ \text{J}$$

El trabajo necesario para desplazar la masa es positivo. Esto significa que su movimiento es espontáneo (se mueve de mayor a menor potencial), lo realiza el campo gravitatorio.

El campo gravitatorio es conservativo, así que el trabajo realizado es independiente de la trayectoria seguida para ir desde *A* hasta *B*.

39. a) De acuerdo con el principio de superposición, el campo gravitatorio total es la suma de los campos vectoriales debidos a cada una de las masas.

El vector campo gravitatorio que crea cada masa está dirigido hacia la masa, tal como se indica en la figura:



Calculamos el módulo del campo gravitatorio creado por cada masa:

$$g_1 = G\frac{m_1}{r_1^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{20}{0{,}5^2} = 5{,}3 \cdot 10^{-9}\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$g_2 = G\frac{m_2}{r_2^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{30}{0{,}5^2} = 8{,}0 \cdot 10^{-9}\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

En el punto medio *P*, los campos debidos a cada masa tienen la misma dirección, distinto módulo y sentidos opuestos. Por tanto, el campo gravitatorio total tendrá por módulo la diferencia de g_1 y g_2 y estará dirigido hacia la masa de 30 kg, que es la que crea el campo más intenso.

$$g = g_2 - g_1 = 8{,}0 \cdot 10^{-9} - 5{,}3 \cdot 10^{-9} = 2{,}7 \cdot 10^{-9}\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

b) Calculamos los potenciales en cada punto aplicando el principio de superposición:

$$V = \sum_i -G \cdot \frac{m_i}{r_i}$$

En el punto medio:

$$V_A = -G \cdot \frac{m_1}{r_1} - G \cdot \frac{m_2}{r_2} = \frac{-G}{r}(m_1 + m_2)$$

$$V_A = \frac{-6{,}67 \cdot 10^{-11}}{0{,}5} \cdot (20 + 30) = -6{,}67 \cdot 10^{-9}\ \text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{kg}^{-1}$$

En el punto *B* en la mediatriz:

$$V_B = -G \cdot \frac{m_1}{r_1} - G \cdot \frac{m_2}{r_2} = \frac{-G}{r'}(m_1 + m_2)$$

$$V_B = \frac{-6{,}67 \cdot 10^{-11}}{1} \cdot (20 + 30) = -3{,}34 \cdot 10^{-9}\ \text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{kg}^{-1}$$

El trabajo necesario para desplazar una masa en el seno de un campo gravitatorio es:

$$W = -\Delta E_p = -m(V_B - V_A)$$

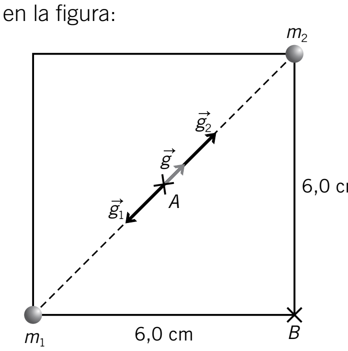
Sustituimos y calculamos el trabajo:

$$W = -2(-3{,}34 \cdot 10^{-9} + 6{,}67 \cdot 10^{-9}) = -6{,}67 \cdot 10^{-9}\ \text{J}$$

El trabajo necesario para desplazar la masa es negativo. Esto significa que su movimiento no es espontáneo (se mueve de menor a mayor potencial), lo realiza por la acción de una fuerza externa, en contra del campo gravitatorio.

40. a) De acuerdo con el principio de superposición, el campo gravitatorio total es la suma de los campos vectoriales debidos a cada una de las masas.

El vector campo gravitatorio que crea cada masa en el centro del cuadrado está dirigido hacia la masa, tal como se indica en la figura:



Calculamos la distancia de cada masa al centro del cuadrado por el teorema de Pitágoras:

$$r_1 = r_2 = \frac{\sqrt{6^2 + 6^2}}{2} = 3\sqrt{2} \text{ cm} = 0{,}03\sqrt{2} \text{ m}$$

Calculamos el módulo del campo gravitatorio creado por cada masa:

$$g_1 = G\frac{m_1}{r_1^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{100 \cdot 10^{-3}}{\left(0{,}03\sqrt{2}\right)^2} =$$

$$= 3{,}71 \cdot 10^{-9} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$g_2 = G\frac{m_2}{r_2^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{300 \cdot 10^{-3}}{\left(0{,}03\sqrt{2}\right)^2} =$$

$$= 1{,}11 \cdot 10^{-8} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

En el centro del cuadrado, los campos debidos a cada masa tienen la misma dirección, distinto módulo y sentidos opuestos. Por tanto, el campo gravitatorio total tendrá por módulo la diferencia de g_1 y g_2 y estará dirigido hacia la masa m_2 = 300 g, que es la que crea el campo más intenso:

$$g = g_2 - g_1 = 1{,}1 \cdot 10^{-8} - 3{,}7 \cdot 10^{-9} = 7{,}4 \cdot 10^{-9} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Una vez conocido el campo gravitatorio, hallamos la fuerza que se ejercería sobre una masa M allí colocada:

$$\vec{F} = M \cdot \vec{g} \rightarrow F = M \cdot g = 10 \cdot 10^{-3} \cdot 7{,}4 \cdot 10^{-9} =$$

$$= 7{,}4 \cdot 10^{-11} \text{ N}$$

dirigida, como el campo gravitatorio, hacia la masa de mayor valor.

b) Calculamos los potenciales en cada punto aplicando el principio de superposición:

$$V = \sum_i -G \cdot \frac{M_i}{r_i}$$

En el centro del cuadrado:

$$V_A = -G \cdot \frac{m_1}{r_1} - G \cdot \frac{m_2}{r_2} = \frac{-G}{r}(m_1 + m_2)$$

$$V_A = \frac{-6{,}67 \cdot 10^{-11}}{0{,}03\sqrt{2}} \cdot (0{,}1 + 0{,}3) =$$

$$= -6{,}29 \cdot 10^{-10} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{kg}^{-1}$$

En el punto B en un vértice:

$$V_B = -G \cdot \frac{m_1}{r_1} - G \cdot \frac{m_2}{r_2} = \frac{-G}{r'}(m_1 + m_2)$$

$$V_B = \frac{-6{,}67 \cdot 10^{-11}}{6{,}0 \cdot 10^{-2}} \cdot (0{,}1 + 0{,}3) =$$

$$= -4{,}45 \cdot 10^{-10} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{kg}^{-1}$$

El trabajo necesario para desplazar una masa en el seno de un campo gravitatorio es:

$$W = -\Delta E_p = -m\left(V_B - V_A\right)$$

Sustituimos y calculamos el trabajo:

$$W = -10 \cdot 10^{-3} \cdot \left(-4{,}5 \cdot 10^{-10} + 6{,}3 \cdot 10^{-10}\right) =$$

$$= -1{,}8 \cdot 10^{-12} \text{ J}$$

El trabajo necesario para desplazar la masa es negativo. Esto significa que su movimiento no es espontáneo (se mueve de menor a mayor potencial), ya que lo realiza por la acción de una fuerza externa, en contra del campo gravitatorio.

41. a) Expresamos la intensidad de campo gravitatorio en la superficie terrestre y a la distancia r y las relacionamos para despejar la distancia r:

$$\left.\begin{array}{l} g_0 = G\dfrac{M_T}{R_T^2} \\ g = G\dfrac{M_T}{r^2} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{g_0}{g} = \frac{\dfrac{\cancel{G}\cancel{M_T}}{R_T^2}}{\dfrac{\cancel{G}\cancel{M_T}}{r^2}} \rightarrow \frac{\cancel{g_0}}{\dfrac{\cancel{g_0}}{2}} = \frac{r^2}{R_T^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow r^2 = 2R_T^2 \rightarrow r = \sqrt{2}\,R_T$$

La altura sobre la superficie terrestre es la diferencia entre esta distancia y el radio de la Tierra:

$$h = r - R_T = \sqrt{2}R_T - R_T = \left(\sqrt{2} - 1\right)R_T$$

b) Expresamos el potencial gravitatorio en la superficie terrestre y a la distancia r y las relacionamos para despejar la distancia r:

$$\left.\begin{array}{l} V_0 = G\dfrac{M_T}{R_T} \\ V = G\dfrac{M_T}{r} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{V_0}{V} = \frac{\dfrac{\cancel{G}\cancel{M_T}}{R_T}}{\dfrac{\cancel{G}\cancel{M_T}}{r}} \rightarrow \frac{\cancel{V_0}}{\dfrac{\cancel{V_0}}{2}} = \frac{r}{R_T} \rightarrow$$

$$\rightarrow r = 2R_T$$

La altura sobre la superficie terrestre es la diferencia entre esta distancia y el radio de la Tierra:

$$h = r - R_T = 2R_T - R_T = R_T$$

42. El cuerpo describe un MRUA en la dirección vertical. La aceleración de ese movimiento coincide con la intensidad del campo gravitatorio en la superficie de la Luna.

Expresamos la aceleración de la gravedad en las superficies terrestre y lunar para relacionarlas y hallar su valor en la Luna:

$$\left.\begin{array}{l} g_L = G\dfrac{M_L}{R_L^2} \\ g_T = G\dfrac{M_T}{R_T^2} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{g_L}{g_T} = \frac{\dfrac{\cancel{G}\cancel{M_L}}{R_L^2}}{\dfrac{\cancel{G}\,81\cancel{M_L}}{\left(\dfrac{11}{3}\right)^2 R_L^2}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{g_L}{g_T} = \frac{11^2}{3^2 \cdot 81} \rightarrow g_L = \frac{11^2}{3^2 \cdot 81} \cdot 9{,}81 = 1{,}63 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Utilizamos las ecuaciones del MRUA teniendo en cuenta que, al alcanzar la altura máxima, la velocidad del cuerpo es nula:

$$v^2 = v_0^2 - 2g_L h \rightarrow h = \frac{v_0^2 - v^2}{2g_L}$$

Sustituimos y calculamos la altura:

$$h = \frac{40,0^2}{2 \cdot 1,63} = 490 \text{ m}$$

43. El campo gravitatorio es conservativo. Planteamos la conservación de la energía mecánica del cuerpo:

$$\Delta E_m = 0 \rightarrow \left(E_{pB} + E_{cB}\right) - \left(E_{pA} + E_{cA}\right) = 0$$

La velocidad mínima que se pide permite al cuerpo alcanzar altura, siendo su energía cinética final nula. Sustituimos las expresiones de las energías y despejamos la velocidad inicial:

$$-G\frac{M_T \cancel{m}}{R_T + h} - \left(-G\frac{M_T \cancel{m}}{R_T} + \frac{1}{2}\cancel{m}v^2\right) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow v^2 = 2GM_T\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T + h}\right)$$

$$v = \sqrt{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \cdot \left(\frac{1}{6,37 \cdot 10^6} - \frac{1}{10,37 \cdot 10^6}\right)} =$$

$$= 6\,950 \text{ m·s}^{-1}$$

44. La aceleración de la gravedad en la superficie del planeta es:

$$g = G\frac{M}{R^2}$$

Suponiendo que el planeta es esférico, relacionamos la masa con la densidad:

$$\rho = \frac{M}{V} \rightarrow M = \rho \cdot V = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$$

Sustituimos este resultado en el campo gravitatorio y despejamos la densidad media:

$$g = G\frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^{\cancel{3}}}{\cancel{R^2}} \rightarrow \rho = \frac{3g}{4\pi G R}$$

Sustituimos los datos y calculamos:

$$\rho = \frac{3 \cdot 6,2}{4\pi \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 3,2 \cdot 10^6} = 6,9 \cdot 10^3 \text{ kg·m}^{-3}$$

La velocidad de escape desde la superficie del planeta es:

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{2gR} \rightarrow$$

$$\rightarrow v_e = \sqrt{2 \cdot 6,2 \cdot 3,2 \cdot 10^6} = 6,3 \cdot 10^3 \text{ m·s}^{-1}$$

45. Expresamos la velocidad de escape desde las superficies de los dos planetas y las relacionamos:

$$\left.\begin{array}{l} v_{eA} = \sqrt{\dfrac{2GM_A}{R_A}} \\ v_{eB} = \sqrt{\dfrac{2GM_B}{R_B}} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{v_{eA}}{v_{eB}} = \frac{\sqrt{\dfrac{\cancel{2G} \cdot 3\cancel{M_B}}{4\cancel{R_B}}}}{\sqrt{\dfrac{\cancel{2G}\cancel{M_B}}{\cancel{R_B}}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{3}{4}} = 0,87$$

46. a) La aceleración de la gravedad en la superficie del asteroide es:

$$g = G\frac{M}{R^2}$$

Suponiendo que el asteroide es esférico, relacionamos la masa con la densidad:

$$\rho = \frac{M}{V} \rightarrow M = \rho \cdot V = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$$

Sustituimos este resultado en el campo gravitatorio:

$$g = G\frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^{\cancel{3}}}{\cancel{R^2}} \rightarrow g = \frac{4\pi\rho G R}{3}$$

Sustituimos los datos y calculamos:

$$g = \frac{4\pi \cdot 5,5 \cdot 10^3 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5 \cdot 10^3}{3} =$$

$$= 7,7 \cdot 10^{-3} \text{ kg·m}^{-3}$$

b) La velocidad de escape desde la superficie del asteroide es:

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{2gR} \rightarrow$$

$$\rightarrow v_e = \sqrt{2 \cdot 7,7 \cdot 10^{-3} \cdot 5\,000} = 8,8 \text{ m·s}^{-1}$$

47. a) La variación de la energía potencial gravitatoria del cohete es:

$$\Delta E_p = E_{pB} - E_{pA} = -G\frac{Mm}{r_B} + G\frac{Mm}{r_A} \rightarrow$$

$$\rightarrow \Delta E_p = -GMm\left(\frac{1}{R_T + h} - \frac{1}{R_T}\right)$$

Sustituimos los datos y calculamos:

$$\Delta E_p = -6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \cdot 600 \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{1}{7,57 \cdot 10^6} - \frac{1}{6,37 \cdot 10^6}\right) = 5,96 \cdot 10^9 \text{ J}$$

b) El cuerpo escapará de la acción del campo gravitatorio terrestre si su energía mecánica es igual o superior a cero. Para ello, hay que suministrarle una energía adicional:

$$\Delta E = \left(E_{pB} + E_{cB}\right) - \left(E_{pA} + E_{cA}\right) \rightarrow \Delta E = -E_{pA}$$

$$\Delta E = G\frac{M_T m}{R_T + h} = 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5,98 \cdot 10^{24} \cdot 600}{7,57 \cdot 10^6} =$$

$$= 3,16 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

48. Relacionamos la aceleración de la gravedad en Júpiter con la de la Tierra:

$$g = G\frac{M}{R^2} \rightarrow \frac{g_J}{g_T} = \frac{\cancel{G}\dfrac{M_J}{R_J^2}}{\cancel{G}\dfrac{M_T}{R_T^2}} = \frac{M_J}{M_T} \cdot \left(\frac{R_T}{R_J}\right)^2$$

Sustituimos los datos y calculamos la aceleración de la gravedad en Júpiter:

$$\frac{g_J}{g_T} = \frac{300\,\cancel{M_T}}{\cancel{M_T}}\left(\frac{\cancel{R_T}}{10\,\cancel{R_T}}\right)^2 = \frac{300}{10^2} = 3 \rightarrow g_J = 3g_T$$

a) El peso del astronauta en Júpiter es:

$$P = mg_J = 75 \cdot 3 \cdot 9{,}81 = 2{,}21 \cdot 10^3 \text{ N}$$

b) Aplicamos la tercera ley de Kepler para relacionar el tiempo que tardan los planetas en dar una vuelta alrededor del Sol con su distancia media a este:

$$T^2 = k \cdot r^3 \rightarrow \frac{T_J^2}{T_T^2} = \frac{\cancel{k} \cdot r_J^3}{\cancel{k} \cdot r_T^3} = \frac{(5\,\cancel{r_T})^3}{\cancel{r_T^3}} = 125 \rightarrow$$

$$\rightarrow T_J^2 = 125T_T^2 \rightarrow T_J = \sqrt{125}\,T_T = 11{,}2T_T$$

Por tanto, como el período de la Tierra es un año terrestre, Júpiter tarda en dar una vuelta al Sol 11,2 años terrestres.

49. Utilizamos el dato de que los dos planetas tienen la misma densidad para hallar la relación entre sus masas:

$$\rho = \rho_T \rightarrow \frac{M_P}{\frac{4}{\cancel{3}}\pi R_P^3} = \frac{M_T}{\frac{4}{\cancel{3}}\pi R_T^3} \rightarrow \frac{M_P}{M_T} = \frac{R_P^3}{R_T^3}$$

$$\frac{M_P}{M_T} = \frac{\left(\frac{1}{2}R_T\right)^3}{R_T^3} = \frac{1}{8} \rightarrow M_P = \frac{1}{8}M_T$$

Relacionamos los valores de la gravedad en la superficie de los dos planetas:

$$g = G\frac{M}{R^2} \rightarrow \frac{g_P}{g_T} = \frac{\cancel{G}\frac{M_P}{R_P^2}}{\cancel{G}\frac{M_T}{R_T^2}} = \frac{R_T^2}{R_P^2} \cdot \frac{M_P}{M_T}$$

Sustituimos la relación entre las masas:

$$\frac{g_P}{g_T} = \frac{\cancel{R_T^2}}{\cancel{R_P^2}} \cdot \frac{R_P^{\cancel{3}}}{R_T^{\cancel{3}}} = \frac{R_P}{R_T} \rightarrow g_P = \frac{R_P}{R_T}g_T$$

Sustituimos los datos del ejercicio:

$$g_P = \frac{\frac{1}{2}\cancel{R_T}}{\cancel{R_T}} \cdot g_T = \frac{1}{2} \cdot 9{,}81 = 4{,}91 \text{ m·s}^{-2}$$

— La velocidad de un satélite que orbita a este planeta es:

$$v = \sqrt{G\frac{M_P}{R_P + h}}$$

Sustituimos los datos y obtenemos:

$$v = \sqrt{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{\frac{1}{8} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{\frac{1}{2} \cdot 6{,}37 \cdot 10^6 + 4 \cdot 10^5}} =$$

$$= 3{,}73 \cdot 10^3 \text{ m·s}^{-1}$$

Utilizamos las ecuaciones del MCU para calcular el período del movimiento del satélite:

$$v = \frac{2\pi r}{T} \rightarrow T = \frac{2\pi(R_P + h)}{v} \rightarrow$$

$$T = \frac{2\pi \cdot \left(\frac{1}{2}6{,}37 \cdot 10^6 + 4 \cdot 10^5\right)}{3\,730} = 6\,040 \text{ s}$$

$$T = 6\,040 \text{ s} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3\,600 \text{ s}} = 1{,}68 \text{ h}$$

50. Un satélite geoestacionario se caracteriza por tener un período orbital que es igual al período de rotación de la Tierra: $T = 1$ día $= 86\,400$ s.

Utilizamos la expresión del período en un movimiento circular, así como la de la velocidad orbital, para relacionar el radio de la órbita con el período:

$$\left.\begin{array}{l} v = \dfrac{2\pi r}{T} \\ v = \sqrt{G\dfrac{M_T}{r}} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = G\frac{M_T}{r} \rightarrow r^3 = \frac{GM_T T^2}{4\pi^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 86\,400^2}{4\pi^2}} =$$

$$= 4{,}23 \cdot 10^7 \text{ m}$$

El peso del satélite en la órbita es igual a la fuerza de atracción gravitatoria que ejerce la Tierra sobre él:

$$F = G\frac{M_T m}{r^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 10^3}{\left(4{,}23 \cdot 10^7\right)^2} = 223 \text{ N}$$

51. a) La velocidad de un satélite que orbita a la Tierra es:

$$v = \sqrt{G\frac{M_T}{R_T + h}}$$

Sustituimos los datos y obtenemos:

$$v = \sqrt{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5{,}98 \cdot 10^{24}}{6{,}37 \cdot 10^6 + 2 \cdot 10^4}} =$$

$$= 3{,}9 \cdot 10^3 \text{ m·s}^{-1}$$

b) Si la velocidad del satélite se anula, su energía mecánica queda igual a la energía potencial gravitatoria a esa altura.

Planteamos la conservación de la energía mecánica:

$$\Delta E_m = 0 \rightarrow \left(E_{pf} + E_{cf}\right) - \left(E_{pi} + E_{ci}\right) = 0$$

Sustituimos las expresiones de las energías y despejamos la velocidad final:

$$\left(-G\frac{M_T\,\cancel{m}}{R_T} + \frac{1}{2}\cancel{m}v^2\right) + G\frac{M_T\,\cancel{m}}{R_T + h} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow v^2 = 2GM_T\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T + h}\right)$$

$$v = \sqrt{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot \left(\frac{1}{6{,}37 \cdot 10^{6}} - \frac{1}{2{,}637 \cdot 10^{7}}\right)} =$$

$$= 9{,}8 \cdot 10^{3}\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

52. a) La expresión de la velocidad orbital del satélite es:

$$v = \sqrt{G\frac{M_T}{r}}$$

Sustituyendo esta expresión, la energía cinética del satélite es:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mG\frac{M_T}{r} = \frac{1}{2}G\frac{M_T m}{r}$$

Despejamos el radio de la órbita de esta expresión, sustituimos y lo calculamos:

$$r = \frac{GM_T m}{2E_c}$$

$$r = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 200}{2 \cdot 5{,}30 \cdot 10^{9}} = 7{,}53 \cdot 10^{6}\ \text{m}$$

La energía mecánica del satélite se puede obtener a partir de la energía cinética:

$$E_c = \frac{1}{2}G\frac{M_T m}{r} = -\frac{1}{2}E_p \rightarrow E_p = -2E_c$$

$$E_m = E_c + E_p = E_c - 2E_c \rightarrow E_m = -E_c$$

$$E_m = -5{,}30 \cdot 10^{9}\ \text{J}$$

b) La velocidad de escape del campo gravitatorio terrestre es:

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM_T}{r}}$$

Sustituimos el radio de la órbita del satélite hallado en el apartado anterior y calculamos:

$$v_e = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{7{,}53 \cdot 10^{6}}} = 1{,}03 \cdot 10^{4}\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

53. a) El momento angular de la sonda respecto al centro de la Tierra es:

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} \rightarrow L = r\,m\,v \cdot \text{sen } 90°$$

La velocidad orbital de la sonda es:

$$v = \sqrt{G\frac{M_T}{r}}$$

Por tanto, podemos expresar el momento angular como:

$$L = r\,m\sqrt{G\frac{M_T}{r}} = m\sqrt{GM_T r} = m\sqrt{GM_T(R_T + h)} \rightarrow$$

$$\rightarrow L = m\sqrt{GM_T\left(R_T + 1{,}5R_T\right)} = m\sqrt{GM_T \cdot 2{,}5R_T}$$

Sustituimos los datos y calculamos:

$$L = 5\,000 \cdot \sqrt{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 2{,}5 \cdot 6{,}37 \cdot 10^{6}} =$$

$$= 3{,}98 \cdot 10^{14}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

b) La sonda escapará de la acción del campo gravitatorio terrestre si su energía mecánica es igual o superior a cero. Para ello, hay que suministrarle una energía adicional:

$$\Delta E = E_{mB} - E_{mA} \rightarrow \Delta E = E_{mA} = \frac{1}{2}E_{pA}$$

$$\Delta E = -\frac{1}{2}G\frac{M_T m}{R_T + h} = -\frac{1}{2}G\frac{M_T m}{2{,}5R_T}$$

$$\Delta E = -\frac{1}{2} \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 5\,000}{2.5 \cdot 6{,}37 \cdot 10^{6}} =$$

$$= 1{,}25 \cdot 10^{11}\ \text{J}$$

54. El satélite gira en una órbita circular y tarda dos días en dar una vuelta completa. Por tanto, el período orbital es el siguiente: $T = 2$ días $= 2 \cdot 86\,400$ s $= 172\,800$ s.

a) Utilizamos la expresión del período en un movimiento circular, así como la de la velocidad orbital, para relacionar el radio de la órbita con el período:

$$\left.\begin{array}{l} v = \dfrac{2\pi r}{T} \\ v = \sqrt{G\dfrac{M_T}{r}} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = G\frac{M_T}{r} \rightarrow r^3 = \frac{GM_T T^2}{4\pi^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}} \rightarrow$$

$$\rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 172\,800^2}{4\pi^2}} =$$

$$= 6{,}71 \cdot 10^{7}\ \text{m}$$

La altura sobre la superficie de la Tierra es la diferencia entre el radio de la órbita y el radio terrestre:

$$h = r - R_T = 6{,}71 \cdot 10^{7} - 6{,}37 \cdot 10^{6} = 6{,}07 \cdot 10^{7}\ \text{m}$$

b) La energía que hay que comunicar para poner el satélite en órbita es la diferencia entre las energías mecánicas en la órbita y en la superficie de la Tierra:

$$\Delta E = E_{mB} - E_{mA} = -G\frac{Mm}{2r} + G\frac{Mm}{R_T} \rightarrow$$

$$\rightarrow \Delta E_{\text{órbita}} = -GM_T m\left(\frac{1}{2r} - \frac{1}{R_T}\right)$$

La energía de escape desde la superficie de la Tierra es la energía que hay que comunicar para que el satélite escape del campo gravitatorio terrestre, de forma que llegue al infinito ($E_p = 0$) con energía cinética nula. Por tanto, hay que suministrar una energía igual en valor absoluto a la energía potencial:

$$\Delta E = \left(E_{pB} + E_{cB}\right) - \left(E_{pA} + E_{cA}\right) \rightarrow \Delta E = -E_{pA}$$

$$\Delta E_{escape} = GM_T m\frac{1}{R_T}$$

Dividimos las dos expresiones de las energías para obtener su relación:

$$\frac{\Delta E_{\text{órbita}}}{\Delta E_{\text{escape}}} = \frac{-GM_T m\left(\frac{1}{2r} - \frac{1}{R_T}\right)}{GM_T m \frac{1}{R_T}} = R_T\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2r}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\Delta E_{\text{órbita}}}{\Delta E_{\text{escape}}} = 1 - \frac{R_T}{2r}$$

Sustituimos y calculamos:

$$\frac{\Delta E_{\text{órbita}}}{\Delta E_{\text{escape}}} = 1 - \frac{6{,}37 \cdot 10^6}{2 \cdot 6{,}71 \cdot 10^7} = 0{,}953$$

Por tanto, para poner el satélite en órbita, hay que comunicar el 95,3 % de la energía necesaria para que el satélite escape de la atracción terrestre.

55. a) Tomando la órbita de Io como circular, calculamos la velocidad orbital:

$$v = \frac{2\pi r}{T} \rightarrow v = \frac{2\pi \cdot 4{,}216 \cdot 10^8}{1{,}53 \cdot 10^5} = 1{,}73 \cdot 10^4 \text{ m·s}^{-1}$$

La fuerza centrípeta responsable del movimiento circular de Io es la fuerza de atracción gravitatoria que Júpiter ejerce sobre este satélite. Por tanto:

$$F_g = F_c \rightarrow G\frac{M_J \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}} \rightarrow M_J = \frac{v^2 r}{G}$$

Sustituimos y calculamos:

$$M_J = \frac{(1{,}73 \cdot 10^4)^2 \cdot 4{,}216 \cdot 10^8}{6{,}67 \cdot 10^{-11}} = 1{,}89 \cdot 10^{27} \text{ kg}$$

Aplicamos la tercera ley de Kepler para relacionar el tiempo que tardan los satélites en dar una vuelta alrededor de Júpiter con su distancia media a este planeta:

$$T^2 = k \cdot r^3 \rightarrow \frac{T_2^2}{T_1^2} = \frac{\cancel{k} \cdot r_2^3}{\cancel{k} \cdot r_1^3} \rightarrow T_2^2 = \frac{r_2^3}{r_1^3} T_1^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow T_2 = \sqrt{\frac{r_2^3}{r_1^3}} \cdot T_1 \rightarrow T_2 = \sqrt{\left(\frac{6{,}7 \cdot 10^8}{4{,}216 \cdot 10^8}\right)^3} \cdot 1{,}53 \cdot 10^5 =$$

$$= 3{,}07 \cdot 10^5 \text{ s}$$

b) Sustituimos en la expresión que permite calcular la velocidad de escape:

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM_J}{R_J}} \rightarrow$$

$$\rightarrow v_e = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}89 \cdot 10^{27}}{7{,}15 \cdot 10^7}} = 5{,}94 \cdot 10^4 \text{ m·s}^{-1}$$

56. Un satélite geoestacionario se caracteriza por tener un período orbital que es igual al período de rotación de la Tierra: $T = 1$ día = 86 400 s.

a) Utilizamos la expresión del período en un movimiento circular, así como la de la velocidad orbital, para relacionar el radio de la órbita con el período:

$$\left.\begin{aligned} v &= \frac{2\pi r}{T} \\ v &= \sqrt{G\frac{M_T}{r}} \end{aligned}\right\} \rightarrow \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = G\frac{M_T}{r} \rightarrow r^3 = \frac{GM_T T^2}{4\pi^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 86\,400^2}{4\pi^2}} =$$

$$= 4{,}23 \cdot 10^7 \text{ m}$$

b) La energía mecánica de un satélite en órbita es:

$$E_m = E_c + E_p = -G\frac{Mm}{2r}$$

Sustituimos y calculamos:

$$E_m = -6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 2\,000}{2 \cdot 4{,}23 \cdot 10^7} = -9{,}43 \cdot 10^9 \text{ J}$$

En una órbita circular, el satélite se encuentra siempre a la misma distancia del centro y, por tanto, su energía potencial toma el mismo valor en toda la órbita:

$$E_p = -G\frac{M_T m}{r}$$

Como el trabajo es igual a la variación de la energía potencial, $W = -\Delta E_p$, en este caso, el trabajo es nulo. No hay que aportar energía para mantener el satélite en órbita.

57. a) El campo gravitatorio es conservativo. Aplicamos la conservación de la energía mecánica:

$$\Delta E_m = 0 \rightarrow \left(E_{pB} + E_{cB}\right) - \left(E_{pA} + E_{cA}\right) = 0$$

$$-\frac{1}{2}G\frac{M_T \cancel{m}}{10R_T} - \left(-G\frac{M_T \cancel{m}}{R_T} + \frac{1}{2}\cancel{m}v^2\right) = 0$$

$$v^2 = \frac{2GM_T}{R_T}\left(-\frac{1}{20} + 1\right) \rightarrow v = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T} \cdot \frac{19}{20}} \rightarrow$$

$$\rightarrow v = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{6{,}37 \cdot 10^6} \cdot \frac{19}{20}} =$$

$$= 1{,}09 \cdot 10^4 \text{ m·s}^{-1}$$

En el momento del lanzamiento, el satélite tiene energía potencial gravitatoria, por estar en la superficie de la Tierra, y energía cinética. Conforme va ascendiendo, la energía potencial aumenta en la misma cantidad en la que la energía cinética disminuye, de forma que la energía mecánica del satélite permanece constante.

b) La energía mecánica del satélite en órbita solo depende de su masa y del radio de la órbita. Escribimos la expresión de esta energía en las dos órbitas y las relacionamos:

$$E_m = -\frac{1}{2}G\frac{M_T m}{r} \rightarrow \frac{E'_m}{E_m} = \frac{-\frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}\cancel{G}\frac{\cancel{Mm}}{r'}}{-\frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}\cancel{G}\frac{\cancel{Mm}}{r}} = \frac{r}{r'}$$

Sustituimos la relación entre los radios:

$$\frac{E'_m}{E_m} = \frac{r}{2r} \rightarrow E'_m = \frac{1}{2}E_m$$

58. a) En una órbita circular, el satélite se encuentra siempre a la misma distancia del centro y, por tanto, su energía potencial toma el mismo valor en toda la órbita:

$$E_p = -G\frac{M_T m}{r}$$

Como el trabajo es igual a la variación de la energía potencial, $W = -\Delta Ep$, este es igual a cero. Por tanto, no hay que realizar trabajo para mantener el satélite en la órbita (sí hay que realizar trabajo contra el campo gravitatorio para llevarlo desde la superficie terrestre hasta la órbita).

Expresamos la aceleración de la gravedad en la superficie terrestre y en la órbita para relacionarlas y despejar el radio de la órbita:

$$g = G\frac{M}{R^2} \rightarrow \frac{g_{órb.}}{g_T} = \frac{\cancel{G}\frac{\cancel{M_T}}{r^2}}{\cancel{G}\frac{\cancel{M_T}}{R_T^2}} \rightarrow \frac{\frac{1}{3}\cancel{g_T}}{\cancel{g_T}} = \frac{R_T^2}{r^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow r^2 = 3R_T^2 \rightarrow r = \sqrt{3}R_T$$

La altura sobre la superficie terrestre es la diferencia entre este valor y el radio de la Tierra:

$$h = r - R_T = \sqrt{3}R_T - R_T = \left(\sqrt{3}-1\right)R_T \rightarrow$$

$$\rightarrow h = \left(\sqrt{3}-1\right)\cdot 6,37\cdot 10^6 = 4,66\cdot 10^6 \text{ m}$$

b) Utilizamos la expresión del período en un movimiento circular, así como la de la velocidad orbital, para relacionar el radio de la órbita con el período:

$$\left.\begin{array}{l} v = \dfrac{2\pi r}{T} \\ v = \sqrt{G\dfrac{M_T}{r}} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = G\frac{M_T}{r} \rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM_T}$$

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{GM_T}} = \sqrt{\frac{4\pi^2\cdot\left(\sqrt{3}\cdot 6,37\cdot 10^6\right)^3}{6,67\cdot 10^{-11}\cdot 5,98\cdot 10^{24}}} = 11\,500 \text{ s}$$

$$T = 11\,500 \text{ s}\cdot\frac{1 \text{ hora}}{3600 \text{ s}} = 3,20 \text{ h}$$

Calculamos la energía mecánica en la órbita:

$$E_m = -\frac{1}{2}G\frac{Mm}{r} \rightarrow$$

$$\rightarrow E_m = -\frac{1}{2}\cdot 6,67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{5,98\cdot 10^{24}\cdot 400}{\sqrt{3}\cdot 6,37\cdot 10^6} =$$

$$= -7,23\cdot 10^9 \text{ J}$$

59. a) La fuerza centrípeta responsable del movimiento circular del satélite es la fuerza de atracción gravitatoria que la Tierra ejerce sobre este. Por tanto:

$$F_g = F_c \rightarrow G\frac{M_V \cancel{m}}{r^2} = \cancel{m}\omega^2 r \rightarrow r^3 = \frac{GM_V}{\omega^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{GM_V}{\omega^2}}$$

Sustituimos y calculamos:

$$r = \sqrt[3]{\frac{6,67\cdot 10^{-11}\cdot 4,87\cdot 10^{24}}{\left(1,45\cdot 10^{-4}\right)^2}} = 2,49\cdot 10^7 \text{ m}$$

Despejamos la masa de la expresión del momento angular del satélite:

$$L = rmv = m\omega r^2 \rightarrow m = \frac{L}{\omega r^2}$$

Sustituimos y calculamos:

$$m = \frac{2,2\cdot 10^{12}}{1,45\cdot 10^{-4}\cdot\left(2,49\cdot 10^7\right)^2} = 24 \text{ kg}$$

b) Para calcular la energía, necesitamos determinar el radio de la segunda órbita, utilizando la misma expresión que en el apartado a):

$$r = \sqrt[3]{\frac{GM_V}{\omega^2}} \rightarrow$$

$$\rightarrow r_B = \sqrt[3]{\frac{6,67\cdot 10^{-11}\cdot 4,87\cdot 10^{24}}{\left(1,0\cdot 10^{-4}\right)^2}} = 3,19\cdot 10^7 \text{ m}$$

La energía que es preciso invertir para cambiar un satélite de órbita es la diferencia entre las energías mecánicas de las órbitas de destino y de partida:

$$\Delta E = E_{mB} - E_{mA} = -G\frac{M_V m}{2r_B} + G\frac{M_V m}{2r_A} \rightarrow$$

$$\rightarrow \Delta E = -\frac{GM_V m}{2}\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)$$

Sustituimos y calculamos:

$$\Delta E = -\frac{6,67\cdot 10^{-11}\cdot 4,87\cdot 10^{24}\cdot 24}{2}\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{1}{3,19\cdot 10^7} - \frac{1}{2,49\cdot 10^7}\right) = 3,5\cdot 10^7 \text{ J}$$

60. a) La fuerza centrípeta responsable del movimiento circular del satélite es la fuerza de atracción gravitatoria que la Tierra ejerce sobre este. Por tanto:

$$F_g = F_c \rightarrow G\frac{M_T \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}} \rightarrow r = \frac{GM_T}{v^2}$$

Sustituimos y calculamos:

$$r = \frac{6,67\cdot 10^{-11}\cdot 5,98\cdot 10^{24}}{7610^2} = 6,89\cdot 10^6 \text{ m}$$

Despejamos la masa de la expresión de la energía mecánica del satélite:

$$E_m = -E_c = -\frac{1}{2}mv^2 \rightarrow m = \frac{-2E_m}{v^2}$$

Sustituimos y calculamos:

$$m = \frac{-2\cdot\left(-4,5\cdot 10^9\right)}{7\,610^2} = 160 \text{ kg}$$

Calculamos el módulo del momento lineal:

$$p = mv \rightarrow p = 160\cdot 7\,610 = 1,2\cdot 10^6 \text{ kg·m·s}^{-1}$$

Y del momento angular:

$$L = mvr \rightarrow L = 160\cdot 7\,610\cdot 6,89\cdot 10^6 =$$
$$= 8,2\cdot 10^{12} \text{ kg·m}^2\text{·s}^{-1}$$

b) Utilizamos las ecuaciones del MCU para calcular el período del movimiento del satélite:

$$v = \frac{2\pi r}{T} \rightarrow T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi\cdot 6,89\cdot 10^6}{7\,610} = 5\,690 \text{ s} \rightarrow$$

$$\rightarrow T = 5\,690 \text{ s}\cdot\frac{1 \text{ h}}{3\,600 \text{ s}} = 1,58 \text{ h}$$

La altura a la que orbita el satélite es la diferencia entre el radio de la órbita y el radio terrestre:

$$h = r - R_T \rightarrow$$
$$\rightarrow h = 6,89\cdot 10^6 - 6,37\cdot 10^6 = 5,22\cdot 10^5 \text{ m}$$

61. a) El trabajo que hay que realizar para cambiar un satélite de órbita es la diferencia entre las energías mecánicas de las órbitas de destino y de partida:

$$W = \Delta E = E_{mB} - E_{mA} = -G\frac{M_T m}{2r_B} + G\frac{M_T m}{2r_A} =$$

$$= -\frac{GM_T m}{2}\left(\frac{1}{5R_T} - \frac{1}{\cancel{5}/_2 R_T}\right) = -\frac{GM_T m}{2}\cdot\frac{-1}{5R_T}$$

Sustituimos y calculamos:

$$W = -\frac{6,67\cdot 10^{-11}\cdot 5,98\cdot 10^{24}\cdot 400}{2\cdot 5\cdot 6,37\cdot 10^6} = 2,50\cdot 10^9 \text{ J}$$

b) Utilizamos la expresión del período en un movimiento circular, así como la de la velocidad orbital, para relacionar el radio de la órbita con el período:

$$\left.\begin{array}{l} v = \dfrac{2\pi r}{T} \\ v = \sqrt{G\dfrac{M_T}{r}} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = G\frac{M_T}{r} \rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM_T}$$

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{GM_T}} = \sqrt{\frac{4\pi^2\cdot\left(5\cdot 6,37\cdot 10^6\right)^3}{6,67\cdot 10^{-11}\cdot 5,98\cdot 10^{24}}} = 56\,500 \text{ s}$$

$$T = 56\,500 \text{ s}\cdot\frac{1 \text{ hora}}{3\,600 \text{ s}} = 15,7 \text{ h}$$

62. a) La velocidad de un cuerpo en órbita circular es:

$$v = \sqrt{G\frac{M}{r}}$$

Utilizando esta expresión, la energía cinética puede escribirse como:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\frac{GM}{r} = \frac{1}{2}G\frac{Mm}{r}$$

La energía potencial en el campo gravitatorio creado por una masa es:

$$E_p = -G\frac{Mm}{r}$$

La relación entre estas dos cantidades es:

$$\frac{E_c}{E_p} = \frac{\frac{1}{2}G\frac{Mm}{r}}{-G\frac{Mm}{r}} = -\frac{1}{2} \rightarrow E_p = -2E_c \rightarrow \frac{E_p}{E_c} = -2$$

b) Además de la relación del apartado a), conocemos el valor de la suma de las energías potencial y cinética:

$$E_m = E_p + E_c = -2E_c + E_c = -E_c$$

Por tanto, las energías pedidas son:

$$E_c = -E_m = 1,0\cdot 10^{10} \text{ J}$$
$$E_p = -2\cdot E_c = -2,0\cdot 10^{10} \text{ J}$$

63. La luz solar describe un MRU. Utilizamos las ecuaciones del MRU para hallar la distancia media de la Tierra y Venus al Sol, esto es, los radios de sus órbitas:

$$r = c\cdot t \rightarrow \left\{\begin{array}{l} r_T = c\cdot t_T \\ r_V = c\cdot t_V \end{array}\right.$$

a) Aplicamos la tercera ley de Kepler para relacionar el período orbital de los planetas con su distancia media al Sol:

$$T^2 = k\cdot r^3 \rightarrow \frac{T_V^2}{T_T^2} = \frac{\cancel{k}\, r_V^3}{\cancel{k}\, r_T^3} = \frac{\left(\cancel{c}\, t_V\right)^3}{\left(\cancel{c}\, t_T\right)^3} \rightarrow$$

$$\rightarrow T_V^2 = \frac{t_V^3}{t_T^3}T_T^2 \rightarrow T_V = \sqrt{\frac{6,01^3}{8,31^3}}\cdot 365,25 = 225 \text{ días}$$

b) Utilizamos las ecuaciones del MCU para calcular la velocidad orbital de Venus:

$$v = \frac{2\pi r}{T} \rightarrow v = \frac{2\pi\cdot ct_V}{T} \rightarrow$$

$$\rightarrow v = \frac{2\pi\cdot 3\cdot 10^8\cdot 6,01\cdot 60}{225\cdot 86\,400} = 35\,000 \text{ m·s}^{-1}$$

64. Datos: $m = 4,5\cdot 10^2$ kg; $v_0 = 3,4\cdot 10^3$ m · s^{-1};
$R = 9,1\cdot 10^5$ m; $M = 3,06\cdot 10^{22}$ kg

Como $m \ll M$, se puede considerar que el planeta está fijo, con lo que la energía mecánica del cuerpo lanzado viene dada por la expresión habitual:

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r} = m\left(\frac{v^2}{2} - \frac{GM}{r}\right)$$

En el momento del lanzamiento, $v = v_0$, $r = R$.

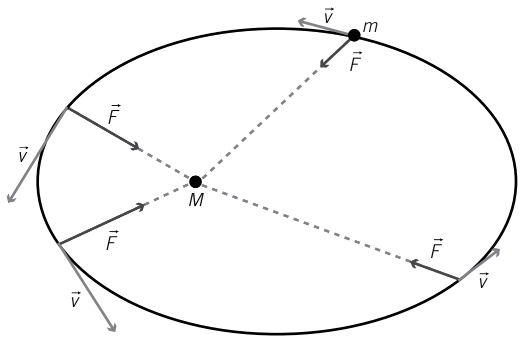
Sustituimos los datos del enunciado para hallar el valor de E_m del cuerpo:

$$E_m = 4,5 \cdot 10^2 \left(\frac{(3,4 \cdot 10^3)^2}{2} - \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 3,06 \cdot 10^{22}}{9,1 \cdot 10^5} \right)$$

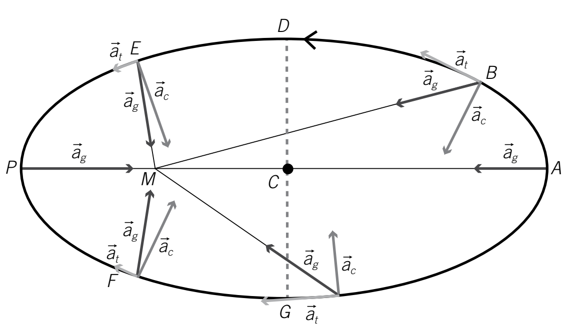
$$E_m = 2,6 \cdot 10^9 \text{ J} > 0$$

Al ser la energía mecánica del cuerpo mayor que cero, su trayectoria será una hipérbola.

65. a) En la siguiente imagen se representan la fuerza gravitatoria y la velocidad en distintos puntos de la órbita elíptica. La imagen es del plano orbital visto desde arriba en el caso de que la masa *m* describa un movimiento en sentido antihorario. La velocidad siempre es tangencial a la trayectoria, y la fuerza gravitatoria va dirigida hacia uno de los focos de la elipse, que corresponde a la posición de la masa *M*.



b) La fuerza gravitatoria de *M* sobre *m* siempre tiene la dirección del vector de posición de *m* respecto a *M*. Por tanto, la fuerza gravitatoria no siempre es perpendicular al vector desplazamiento diferencial, que es tangente a la trayectoria en cada uno de sus puntos. En cada punto de la trayectoria, la aceleración debida a la fuerza gravitatoria, $\vec{a}_g$, se puede descomponer en una componente perpendicular a la trayectoria y una componente tangencial. La componente perpendicular es la aceleración centrípeta, $\vec{a}_c$, mientras que la componente tangencial es la aceleración tangencial, $\vec{a}_t$. Los únicos puntos de la trayectoria en los que no hay aceleración tangencial son el periastro, *P*, y el apoastro, *A*, donde la aceleración gravitatoria coincide con la centrípeta, pues la dirección radial que va de *m* a *M* coincide con la dirección normal a la trayectoria. En la siguiente figura se representan $\vec{a}_g$, $\vec{a}_c$ y $\vec{a}_t$ en distintos puntos de la trayectoria. En toda la trayectoria, excepto en los puntos *A* y *P*, la masa *m* está sometida a una aceleración tangencial.



c) Al haber una aceleración tangencial, la velocidad de *m* no se mantiene constante. La energía mecánica total, E_m, se mantiene constante por conservación de la energía. En consecuencia, la velocidad de *m* es mayor en los puntos en los que la energía potencial gravitatoria, E_p, es menor. La energía potencial gravitatoria es negativa e inversamente proporcional al módulo del vector de posición, *r*. Por tanto, la velocidad es mayor cuanto mayor es el valor absoluto de E_p, puesto que la contribución de la energía cinética deberá también ser mayor para mantener constante el valor de E_m. El punto con mayor velocidad corresponde al de *r* menor, esto es, el periastro *P*. Desde allí, la velocidad va decreciendo (la aceleración tangencial tiene sentido opuesto al de la velocidad) hasta alcanzar su valor mínimo en el apoastro, *A*. Y desde *A* la velocidad va aumentando progresivamente (la aceleración tangencial tiene el mismo sentido que el de la velocidad) hasta su valor máximo en el periastro, *P*.

d) Consultamos en Internet la expresión de la energía mecánica de una masa *m* que describe una órbita elíptica alrededor de *M*, con $m \ll M$:

$$E_m = -G\frac{M\,m}{2a}$$

donde *a* es la longitud del semieje mayor de la elipse.

Si en la anterior se reemplaza la variable *a* por el radio de la circunferencia, *r*, obtenemos la expresión correspondiente a la energía mecánica en una órbita circular:

$$E_m = -G\frac{M\,m}{2r}$$

La diferencia entre las dos expresiones se debe a que en la órbita elíptica no toda la fuerza gravitatoria actúa como fuerza centrípeta. En la órbita circular, en cambio, la fuerza gravitatoria contribuye totalmente a la fuerza centrípeta.

66. El sistema formado por las dos partículas tiene inicialmente momento lineal nulo:

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = 0$$

Sobre las partículas no actúan fuerzas exteriores, así que el momento lineal se conserva. Como las partículas se están acercando, sus velocidades llevan sentidos opuestos.

Por tanto, para que el momento total sea cero, los módulos han de ser iguales en todo instante *t*:

$$p_1 = p_2 = p$$

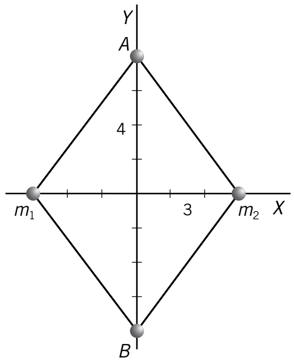
Expresamos la energía cinética en términos del momento lineal y relacionamos su valor para las partículas:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m} \rightarrow \frac{E_{c1}}{E_{c2}} = \frac{\dfrac{\cancel{p^2}}{\cancel{2}m_1}}{\dfrac{\cancel{p^2}}{\cancel{2}m_2}} = \frac{m_2}{m_1}$$

Utilizamos la relación entre las masas de las partículas:

$$\frac{E_{c1}}{E_{c2}} = \frac{m_1/4}{m_1} = \frac{1}{4}$$

67. La distribución de masas es la de la figura:



Las distancias de las masas a los puntos A y B son iguales. Obtenemos su valor aplicando el teorema de Pitágoras:

$$r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ m}$$

Calculamos los potenciales en cada punto aplicando el principio de superposición:

$$V = \sum_i -G \cdot \frac{m_i}{r_i}$$

En el punto A (0, 4):

$$V_A = -G \cdot \frac{m_1}{r_1} - G \cdot \frac{m_2}{r_2} = -\frac{G}{r}(m_1 + m_2)$$

$$V_A = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}}{5} \cdot (5{,}0 + 10) = -2{,}0 \cdot 10^{-10} \text{ N·m·kg}^{-1}$$

En el punto B (0, –4):

$$V_B = -G \cdot \frac{m_1}{r_1} - G \cdot \frac{m_2}{r_2} = -\frac{G}{r}(m_1 + m_2) = V_A$$

$$V_B = -2{,}0 \cdot 10^{-10} \text{ N·m·kg}^{-1}$$

El trabajo necesario para desplazar una masa en el seno de un campo gravitatorio es:

$$W = -\Delta E_p = -m(V_B - V_A) = 0$$

El trabajo necesario para desplazar la masa es nulo. Esto es así porque la masa se desplaza entre dos puntos de igual potencial gravitatorio, que son puntos equivalentes en términos energéticos.

68. Utilizamos el dato de los valores de la gravedad y los radios para hallar una relación entre las masas de la Tierra y la Luna:

$$g = G\frac{M}{R^2} \rightarrow \frac{g_L}{g_T} = \frac{\cancel{G}\dfrac{M_L}{R_L^2}}{\cancel{G}\dfrac{M_T}{R_T^2}} = \frac{R_T^2}{R_L^2}\frac{M_L}{M_T} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1/6\,\cancel{g_T}}{\cancel{g_T}} = \frac{\cancel{R_T^2}}{\left(0{,}27\,\cancel{R_T}\right)^2}\frac{M_L}{M_T} \rightarrow \frac{M_L}{M_T} = \frac{0{,}27^2}{6} = 0{,}012$$

a) Expresamos la densidad en función de la masa y el radio y relacionamos los valores que tiene en la Tierra y la Luna:

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \rightarrow \frac{\rho_L}{\rho_T} = \frac{\dfrac{M_L}{\frac{4}{\cancel{3}}\pi R_L^3}}{\dfrac{M_T}{\frac{4}{\cancel{3}}\pi R_T^3}} = \frac{R_T^3}{R_L^3}\frac{M_L}{M_T}$$

Sustituimos y calculamos:

$$\frac{\rho_L}{\rho_T} = \frac{\cancel{R_T^3}}{\left(0{,}27\,\cancel{R_T}\right)^3}\frac{\cancel{0{,}27^2}}{6} \rightarrow \frac{\rho_L}{\rho_T} = 0{,}62$$

b) Sustituimos en la expresión de la velocidad de escape:

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{r}} \rightarrow \frac{v_{eL}}{v_{eT}} = \frac{\sqrt{\dfrac{\cancel{2G}M_L}{R_L}}}{\sqrt{\dfrac{\cancel{2G}M_T}{R_T}}} = \sqrt{\frac{M_L}{M_T} \cdot \frac{R_T}{R_L}}$$

$$\frac{v_{eL}}{v_{eT}} = \sqrt{\frac{0{,}27^2}{6} \cdot \frac{1}{0{,}27}} = 0{,}21$$

69. Sustituimos en la expresión de la velocidad de escape:

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{r}} \rightarrow \frac{v_{e1}}{v_{e2}} = \frac{\sqrt{\dfrac{\cancel{2GM}}{R_1}}}{\sqrt{\dfrac{\cancel{2GM}}{R_2}}} = \sqrt{\frac{R_2}{R_1}}$$

$$\frac{v_{e1}}{v_{e2}} = \sqrt{\frac{R_2}{2R_2}} \rightarrow \frac{v_{e1}}{v_{e2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = 0{,}71$$

Utilizamos el dato de que los dos planetas tienen la misma densidad para hallar la relación entre sus masas:

$$\rho_1 = \rho_2 \rightarrow \frac{M_1}{\frac{4}{\cancel{3}}\pi R_1^3} = \frac{M_2}{\frac{4}{\cancel{3}}\pi R_2^3} \rightarrow \frac{M_1}{M_2} = \frac{R_1^3}{R_2^3}$$

Relacionamos los valores de las velocidades de escape en las superficies de los dos planetas:

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{r}} \rightarrow \frac{v_{e1}}{v_{e2}} = \frac{\sqrt{\dfrac{\cancel{2G}M_1}{R_1}}}{\sqrt{\dfrac{\cancel{2G}M_2}{R_2}}} = \sqrt{\frac{M_1}{M_2} \cdot \frac{R_2}{R_1}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{v_{e1}}{v_{e2}} = \sqrt{\frac{R_1^3}{R_2^3} \cdot \frac{R_2}{R_1}} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{2\,\cancel{R_2}}{\cancel{R_2}} = 2$$

70. a) La causa de la órbita de Plutón es la fuerza de atracción gravitatoria que el Sol ejerce sobre este planeta.

El campo gravitatorio es un campo central y, por tanto, el momento angular se conserva, tomando igual valor en afelio y perihelio.

b) Utilizamos la conservación del momento angular:

$$L_{\text{afelio}} = L_{\text{perihelio}} \rightarrow r_a \cdot p_a = r_p \cdot p_p \rightarrow \frac{p_a}{p_p} = \frac{r_p}{r_a} < 1$$

El momento lineal en el afelio es menor que en el perihelio.

c) La energía potencial viene dada por:

$$E_p = -G\frac{Mm}{r}$$

En el afelio, la distancia r al centro del Sol es mayor, por lo que la energía potencial es también mayor.

d) La energía mecánica en órbita es:

$$E_m = \frac{1}{2}E_p$$

Por tanto, el comportamiento es como el de la energía potencial, o sea, es mayor en el afelio que en el perihelio.

3 CAOS DETERMINISTA Pág. 91

71. La masa reducida se representa por μ y se utiliza para simplificar el estudio de la interacción gravitatoria entre dos masas m_1 y m_2, lo que se conoce como *problema de los dos cuerpos*. La expresión de la masa reducida es:

$$\mu = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}$$

La *masa reducida* se denomina así porque permite simplificar o reducir el estudio del movimiento de dos cuerpos sometidos a la acción de fuerzas mutuas al de una partícula ficticia de masa μ cuyo vector de posición es el vector de posición relativo que une las dos masas. Esta partícula está sometida a la acción de la fuerza mutua entre masas.

De la expresión anterior se deduce que la masa reducida tiene dimensiones de masa y también que, cuando una de las dos masas es mucho mayor que la otra, $m_1 \gg m_2$, el estudio se simplifica al correspondiente de una masa sometida a la acción de otra mucho mayor y fija en el espacio, pues se verifica que:

$$\mu \approx \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1} = m_2$$

Una vez que se ha resuelto de forma exacta el problema de dos masas, se pueden resolver los sistemas de tres y más masas a partir de métodos perturbativos.

72. Respuesta sugerida:

— El problema de los tres cuerpos consiste en la imposibilidad de resolver de forma analítica exacta las ecuaciones que rigen el movimiento de tres masas.

— Las soluciones son siempre aproximadas y particulares. No se puede dar una solución general.

— *Caos determinista* es el término que se utiliza para describir un sistema sensible a las condiciones iniciales. En el problema de los tres cuerpos, se conocen las ecuaciones matemáticas que rigen el comportamiento, pero dos situaciones inicialmente muy similares evolucionan en el tiempo hasta situaciones muy dispares.

— La teoría de las perturbaciones trata el problema como el de dos cuerpos (que tienen solución exacta) en el que el efecto del tercer cuerpo (el menos masivo de todos y/o más alejado de los otros) consiste en perturbaciones a la posición de los otros dos.

SÍNTESIS Pág. 91

73. La afirmación es falsa. La Tierra ejerce una fuerza sobre las naves espaciales y los astronautas en ellas, que es la responsable del movimiento orbital.

Un astronauta nota que no pesa porque utiliza la nave como su sistema de referencia. La nave tiene el mismo movimiento que el astronauta y, por tanto, este no se «apoya» en el suelo de la nave ni siente una fuerza normal, que es la responsable de la sensación de peso.

74. Relacionamos los valores de la gravedad en la superficie de la Tierra y la Luna:

$$g = G\frac{M}{R^2} \rightarrow \frac{g_L}{g_T} = \frac{\cancel{G}\dfrac{M_L}{R_L^2}}{\cancel{G}\dfrac{M_T}{R_T^2}} = \frac{R_T^2}{R_L^2} \cdot \frac{M_L}{M_T}$$

Sustituimos la relación entre las masas y los radios:

$$\frac{g_L}{g_T} = \frac{\cancel{R_T^2}}{\left(0{,}25\,\cancel{R_T}\right)^2} \cdot \frac{0{,}01\,\cancel{M_T}}{\cancel{M_T}} \rightarrow g_L = \frac{0{,}01}{0{,}25^2}\,g_T \rightarrow$$

$$\rightarrow g_L = \frac{0{,}01}{0{,}25^2} \cdot 9{,}81 = 1{,}57\ \text{m·s}^{-2}$$

a) Durante la caída libre del cuerpo, disminuye su energía potencial en la misma medida en la que aumenta su energía cinética, mientras se conserva su energía mecánica total.

Como la altura h de la que parte el cuerpo es muy pequeña comparada con el radio lunar, podemos aproximar la energía potencial por:

$$E_p = mgh$$

Aplicamos la conservación de la energía mecánica:

$$\Delta E_m = 0 \rightarrow \left(E_{pB} + E_{cB}\right) - \left(E_{pA} + E_{cA}\right) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}\cancel{m}v^2 - \cancel{m}gh = 0 \rightarrow v^2 = 2gh \rightarrow v = \sqrt{2gh}$$

Sustituimos y calculamos:

$$v = \sqrt{2 \cdot 1{,}57 \cdot 50} = 12{,}5\ \text{m·s}^{-1}$$

b) La masa del cuerpo la despejamos de la expresión de su peso en la Tierra:

$$P = mg \rightarrow m = \frac{P}{g_T} \rightarrow m = \frac{800}{9{,}81} = 81{,}6\ \text{kg}$$

Y el peso en la Luna es:

$$P = mg_L \rightarrow P = 81{,}6 \cdot 1{,}57 = 128\ \text{N}$$

75. a) Utilizamos la expresión del período en un movimiento circular, así como la de la velocidad orbital, para relacionar el radio de la órbita con el período:

$$\left.\begin{array}{l} v = \dfrac{2\pi r}{T} \\ v = \sqrt{G\dfrac{M_T}{r}} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = G\frac{M_T}{r} \rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM_T}$$

Sustituimos:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{GM_T}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot (7{,}1 \cdot 10^6)^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}} = 5\,950 \text{ s}$$

$$T = 5\,950 \text{ s} \cdot \frac{1 \text{ hora}}{3\,600 \text{ s}} = 1{,}65 \text{ h}$$

b) El satélite describe un MCU y, por tanto, su velocidad puede expresarse como:

$$v = \frac{2\pi r}{T} \rightarrow v = \frac{2\pi \cdot 7{,}1 \cdot 10^6}{5\,950} = 7{,}5 \cdot 10^3 \text{ m·s}^{-1}$$

El momento lineal queda:

$$p = mv = m\frac{2\pi r}{T} \rightarrow p = 100 \cdot 7{,}5 \cdot 10^3 =$$
$$= 7{,}5 \cdot 10^5 \text{ kg·m·s}^{-1}$$

Y el momento angular:

$$L = rp \rightarrow L = 7{,}1 \cdot 10^6 \cdot 7{,}5 \cdot 10^5 = 5{,}3 \cdot 10^{12} \text{ kg·m}^2\text{·s}^{-1}$$

c) La variación de la energía potencial gravitatoria del satélite es:

$$\Delta E_p = E_{pB} - E_{pA} = -G\frac{Mm}{r_B} + G\frac{Mm}{r_A} \rightarrow$$
$$\rightarrow \Delta E_p = -GMm\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_T}\right)$$

Sustituimos los datos y calculamos:

$$\Delta E_p = -6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 100 \cdot$$
$$\cdot\left(\frac{1}{7{,}1 \cdot 10^6} - \frac{1}{6{,}37 \cdot 10^6}\right) = 6{,}44 \cdot 10^8 \text{ J}$$

d) La energía cinética del satélite es:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{2r} = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot (7{,}5 \cdot 10^3)^2 =$$
$$= 2{,}8 \cdot 10^9 \text{ J}$$

La energía mecánica es:

$$E_m = E_c + E_p = -E_c = -2{,}8 \cdot 10^9 \text{ J}$$

e) Utilizamos la ley de gravitación universal:

$$F_g = G\frac{Mm}{r^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 100}{(7{,}1 \cdot 10^6)^2} = 792 \text{ N}$$

Utilizamos las características del MCU y calculamos la fuerza centrípeta responsable del movimiento:

$$F_c = m\frac{v^2}{r} \rightarrow F_c = 100 \cdot \frac{(7{,}5 \cdot 10^3)^2}{7{,}1 \cdot 10^6} = 792 \text{ N}$$

La fuerza de atracción gravitatoria de la Tierra sobre el satélite es la responsable de su movimiento orbital y, por tanto, su valor coincide con el de la fuerza centrípeta.

76. a) La fuerza de atracción gravitatoria que ejerce la Tierra sobre la Luna es responsable de su movimiento orbital y, por tanto, es la fuerza centrípeta:

$$F_g = F_c \rightarrow G\frac{M_T \cancel{M_L}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{M_L}\frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Despejamos la constante de gravitación universal:

$$G = \frac{v^2 r}{GM_T}$$

Calculamos la velocidad orbital utilizando las ecuaciones del MCU:

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi \cdot 3{,}84 \cdot 10^8}{27{,}32 \cdot 86\,400} = 1\,020 \text{ m·s}^{-2}$$

Calculamos la constante de gravitación universal:

$$G = \frac{1\,020^2 \cdot 3{,}84 \cdot 10^8}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}} = 6{,}71 \cdot 10^{-11} \text{ N·m}^2\text{·kg}^{-2}$$

b) Utilizando las características del MCU, la fuerza que ejerce la Tierra sobre la Luna es:

$$F = M_L\frac{v^2}{r} = 7{,}35 \cdot 10^{22} \cdot \frac{1\,020^2}{3{,}84 \cdot 10^8} = 2{,}00 \cdot 10^{20} \text{ N}$$

c) El trabajo necesario para llevar un objeto desde la superficie de la Tierra hasta la superficie de la Luna es igual a la variación de su energía potencial:

$$W = -\Delta E_p$$

Sobre la superficie terrestre, el objeto tiene dos contribuciones a la energía potencial: la Tierra, de cuyo centro se encuentra a distancia R_T, y la Luna, de cuyo centro se halla a distancia *r:*

$$E_{pA} = -G\frac{M_T m}{R_T} - G\frac{M_L m}{r} = -Gm\left(\frac{M_T}{R_T} + \frac{M_L}{r}\right)$$

Sustituimos y calculamos:

$$E_{pA} = -6{,}71 \cdot 10^{-11} \cdot 5\,000 \cdot \left(\frac{5{,}98 \cdot 10^{24}}{6{,}37 \cdot 10^6} + \frac{7{,}35 \cdot 10^{22}}{3{,}84 \cdot 10^8}\right) =$$
$$= -3{,}15 \cdot 10^{11} \text{ J}$$

Sobre la superficie de la Luna, el objeto tiene dos contribuciones a la energía potencial: la Luna, de cuyo centro se encuentra a distancia R_L, y la Tierra, de cuyo centro se halla a distancia *r.*

$$E_{pB} = -G\frac{M_L m}{R_L} - G\frac{M_T m}{r} = -Gm\left(\frac{M_L}{R_L} + \frac{M_T}{r}\right)$$

Sustituimos y calculamos:

$$E_{pB} = -6{,}71 \cdot 10^{-11} \cdot 5\,000 \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{7{,}35 \cdot 10^{22}}{1{,}74 \cdot 10^{6}} + \frac{5{,}98 \cdot 10^{24}}{3{,}84 \cdot 10^{8}} \right) = -1{,}94 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

El trabajo es:

$$W = -\Delta E_p = E_{pA} - E_{pB} \rightarrow$$

$$\rightarrow W = -3{,}15 \cdot 10^{11} + 1{,}94 \cdot 10^{10} = -2{,}96 \cdot 10^{11} \text{ J}$$

El trabajo tiene signo negativo, lo que indica que una fuerza externa debe hacerlo, en contra del campo gravitatorio creado por la Tierra y la Luna.

d) Aplicamos la ley de gravitación universal y relacionamos las fuerzas que ejercen sobre el objeto la Tierra y la Luna:

$$F_g = \text{G}\frac{Mm}{r^2} \rightarrow \frac{F_T}{F_L} = \frac{\cancel{\text{G}}\dfrac{M_T \cancel{m}}{r_T^2}}{\cancel{\text{G}}\dfrac{M_L \cancel{m}}{r_L^2}} = \frac{r_L^2}{r_T^2} \cdot \frac{M_T}{M_L} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{F_T}{F_L} = \frac{\left(\dfrac{3}{\cancel{4}}\cancel{x}\right)^2}{\left(\dfrac{1}{\cancel{4}}\cancel{x}\right)^2} \cdot \frac{M_T}{M_L} = 3^2 \frac{M_T}{M_L}$$

Sustituimos:

$$\frac{F_T}{F_L} = 9 \cdot \frac{5{,}98 \cdot 10^{24}}{7{,}35 \cdot 10^{22}} = 732$$

Evaluación (Pág. 92)

1. Aplicamos la ley de gravitación universal a las dos situaciones:

$$F = \text{G}\frac{m_1 m_2}{r^2} \rightarrow \frac{\cancel{F}}{\dfrac{\cancel{F}}{4}} = \frac{\cancel{\text{G}}\dfrac{\cancel{m \cdot 2m}}{d^2}}{\cancel{\text{G}}\dfrac{\cancel{m \cdot 2m}}{d'^2}} \rightarrow 4 = \frac{d'^2}{d^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow d'^2 = 4d^2 \rightarrow d' = 2d$$

2. La aceleración de la gravedad en la superficie del asteroide es:

$$g = \text{G}\frac{M}{R^2}$$

Suponiendo que el asteroide es esférico, relacionamos la masa con la densidad:

$$\rho = \frac{M}{V} \rightarrow M = \rho \cdot V = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$$

Sustituimos este resultado en el campo gravitatorio:

$$g = \text{G}\frac{\rho \cdot \dfrac{4}{3}\pi R^{\cancel{3}}}{\cancel{R^2}} \rightarrow g = \frac{4}{3}\pi \text{G} \rho R$$

La respuesta es c).

3. Relacionamos los valores de la gravedad en la superficie y a la distancia x:

$$g = \text{G}\frac{M}{R^2} \rightarrow \frac{g_0}{g} = \frac{\cancel{\text{G}}\dfrac{\cancel{M_T}}{R_T^2}}{\cancel{\text{G}}\dfrac{\cancel{M_T}}{x^2}} = \frac{x^2}{R_T^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow R_T^2 = \frac{g}{g_0}x^2 \rightarrow R_T = \sqrt{\frac{g}{g_0}}\,x = \sqrt{\frac{5}{10}}\,x = \frac{x}{\sqrt{2}}$$

La respuesta es c).

4. Tomamos, por simetría, una superficie gaussiana esférica, concéntrica con la nave espacial e interior a ella.

Por el teorema de Gauss, el flujo del campo eléctrico a través de esta superficie es proporcional a la masa contenida en ella. Como la nave extraterrestre está hueca, el flujo es nulo. Esto implica que no hay líneas de campo atravesando la superficie gaussiana, por lo que el campo gravitatorio en todos los puntos de su superficie es nulo.

Como el argumento es válido independientemente del radio de la superficie gaussiana, siempre que sea interior a la nave, la aceleración de la gravedad en esa nave extraterrestre es cero.

5. El trabajo que realiza la fuerza gravitatoria es igual a la variación de la energía potencial:

$$W = -\Delta E_p = E_{pA} - E_{pB} = -\text{G}\frac{Mm}{r_A} + \text{G}\frac{Mm}{r_B}$$

Dividimos por la masa m del cometa para hallar el trabajo por unidad de masa:

$$\frac{W}{m} = \text{G}M_{\text{Sol}}\left(\frac{1}{r_{\text{afelio}}} - \frac{1}{r_{\text{perihelio}}}\right)$$

Sustituimos y calculamos:

$$W = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 2{,}0 \cdot 10^{30} \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{1}{7{,}2 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{8}} - \frac{1}{0{,}6 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{8}}\right) = -1{,}36 \cdot 10^{9} \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$$

6. El trabajo que realiza el ascensor en contra del campo gravitatorio se invierte en aumentar la energía potencial del cuerpo.

Calculamos el trabajo realizado en el primer planeta:

$$W_1 = \Delta E_p = E_{pB} - E_{pA} = -\text{G}\frac{Mm}{R_1 + h} + \text{G}\frac{Mm}{R_1} =$$

$$= -\text{G}Mm\left(\frac{1}{R+R} - \frac{1}{R}\right) = \frac{\text{G}Mm}{2R}$$

Calculamos el trabajo que se realiza en el segundo planeta:

$$W_2 = \Delta E_p = E_{pB} - E_{pA} = -\text{G}\frac{Mm}{r} + \text{G}\frac{Mm}{R_2} =$$

$$= -\text{G}Mm\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\dfrac{3R}{2}}\right)$$

Como el trabajo realizado es el mismo:

$$\frac{\cancel{GMm}}{2R} = \cancel{GMm}\left(\frac{2}{3R} - \frac{1}{r}\right) \rightarrow \frac{1}{r} = \frac{2}{3R} - \frac{1}{2R} = \frac{1}{6R} \rightarrow$$

$$\rightarrow r = 6R$$

la altura que el objeto alcanza sobre este planeta es la diferencia entre esta distancia y el radio del planeta:

$$h = r - R_2 = 6R - \frac{3R}{2} \rightarrow h = \frac{9R}{2}$$

7. Planteamos la conservación de la energía mecánica del cohete:

$$\Delta E_m = 0 \rightarrow \left(E_{pB} + E_{cB}\right) - \left(E_{pA} + E_{cA}\right) = 0$$

Cuando se lanza el cohete con la velocidad de escape, llega al infinito con energía mecánica nula. Por tanto, la expresión de la velocidad de escape es:

$$\frac{1}{2}mv_e^2 - G\frac{M_T m}{R_T} = 0 \rightarrow v_e = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}$$

Cuando el cohete es lanzado con velocidad superior a la de escape, cuando llega al infinito, la energía potencial es nula, pero tiene energía cinética. En este caso, la conservación de la energía queda:

$$\frac{1}{2}\cancel{m}v_f^2 - \left(\frac{1}{2}\cancel{m}\,(3v_e)^2 - G\frac{M_T\cancel{m}}{R_T}\right) = 0$$

Sustituimos la expresión de la velocidad de escape y operamos:

$$v_f^2 = 9\cdot\frac{2GM_T}{R_T} - 2G\frac{M_T}{R_T} = \frac{16GM_T}{R_T} \rightarrow v_f = 4\sqrt{\frac{GM_T}{R_T}}$$

Sustituimos los valores y calculamos:

$$v_f = 4\cdot\sqrt{\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}}{6{,}37\cdot10^6}} = 31\,600\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

8. Utilizamos la expresión de las densidades de los dos planetas para hallar una relación entre sus masas:

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \rightarrow \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\dfrac{M_1}{\frac{4}{3}\pi R_1^3}}{\dfrac{M_2}{\frac{4}{3}\pi R_2^3}} = \frac{M_1}{M_2}\,\frac{R_2^3}{R_1^3} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\cancel{\rho}}{2\cancel{\rho}} = \frac{M_1}{M_2}\,\frac{\left(2\cancel{R}\right)^3}{\cancel{R^3}} \rightarrow \frac{M_1}{M_2} = \frac{1}{16}$$

Utilizamos la expresión de la velocidad de escape:

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{r}} \rightarrow \frac{v_{e1}}{v_{e2}} = \frac{\sqrt{\dfrac{2\cancel{G}M_1}{\cancel{R}}}}{\sqrt{\dfrac{2\cancel{G}M_2}{2\cancel{R}}}} = \sqrt{2\frac{M_1}{M_2}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{v}{v_{e2}} = \sqrt{2\cdot\frac{1}{16}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \rightarrow v_{e2} = 2\sqrt{2}\,v$$

La respuesta es la d).

9. a) Verdadero. Para hablar del potencial en un punto concreto, debe tomarse una referencia (por ejemplo, que el potencial es nulo en el infinito), puesto que el potencial no está definido de una forma absoluta, sino que lo que tiene sentido es calcular diferencias de potencial.

b) Falso. La fuerza centrípeta que mantiene la Tierra orbitando alrededor del Sol es la fuerza de atracción gravitatoria que ejerce el Sol. Como el campo gravitatorio es un campo central, es conservativo y, por tanto, así lo es la fuerza centrípeta en este caso.

c) Verdadero. Las comunicaciones o el estudio del clima son algunos de los usos más importantes de los satélites. Otros usos son la investigación científica y la observación terrestre.

10. Relacionamos la masa del objeto central con el radio y el período de las órbitas en torno a él:

$$\left.\begin{aligned} v &= \frac{2\pi r}{T} \\ v &= \sqrt{G\frac{M}{r}} \end{aligned}\right\} \rightarrow \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = G\frac{M}{r} \rightarrow M = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}$$

Utilizamos los datos del satélite Ganímedes alrededor de Júpiter y de la Tierra alrededor del Sol para relacionar las masas del Sol y de Júpiter:

$$\frac{M_S}{M_J} = \frac{\dfrac{\cancel{4\pi^2}\, r_T^3}{\cancel{G}\, T_T^2}}{\dfrac{\cancel{4\pi^2}\, r_G^3}{\cancel{G}\, T_G^2}} = \frac{r_T^3\, T_G^2}{r_G^3\, T_T^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{M_S}{M_J} = \frac{(1\,\text{UA})^3\cdot(7{,}16\ \text{días})^2}{(0{,}007\,15\,\text{UA})\cdot(365\ \text{días})^2} = 1\,050$$

La respuesta es la b).

11. Hallamos el período orbital del satélite:

$$\left.\begin{aligned} v &= \frac{2\pi r}{T} \\ v &= \sqrt{G\frac{M_T}{r}} \end{aligned}\right\} \rightarrow \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = G\frac{M_T}{r} \rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM_T}$$

Sustituimos y calculamos:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2\cdot(6{,}37\cdot10^6 + 23\,258\cdot10^3)^3}{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}}} = 50\,720\ \text{s}$$

La inversa del período (frecuencia) es el número de vueltas que da el satélite en 1 s. Multiplicamos este valor por los segundos que hay en 10 días:

$$\frac{1}{50\,720\ \text{s}}\cdot10\ \text{días}\cdot\frac{24\ \text{h}}{1\ \text{día}}\cdot\frac{3\,600\ \text{s}}{1\ \text{h}} = 17\ \text{vueltas}$$

12. El trabajo que se realiza en contra del campo gravitatorio al subir el cuerpo a la terraza es:

$$W_1 = \Delta E_p = E_{pB} - E_{pA} = -G\frac{Mm_1}{R_T + h} + G\frac{Mm_1}{R_T} =$$

$$= -GMm_1\left(\frac{1}{R_T + h} - \frac{1}{R_T}\right)$$

El trabajo que se realiza para poner un satélite en órbita es:

$$W_2 = \Delta E_m = E_{mB} - E_{mA} = -G\frac{Mm_2}{2r} + G\frac{Mm_2}{R_T} =$$

$$= -GMm_2\left(\frac{1}{2r} - \frac{1}{R_T}\right)$$

Igualamos los dos trabajos:

$$\cancel{-GM}\, m_1\left(\frac{1}{R_T + h} - \frac{1}{R_T}\right) = \cancel{-GM}\, m_2\left(\frac{1}{2r} - \frac{1}{R_T}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{m_1}{m_2}\left(\frac{1}{R_T + h} - \frac{1}{R_T}\right) + \frac{1}{R_T} = \frac{1}{2r} \rightarrow$$

$$\rightarrow r = \frac{1/2}{\frac{m_1}{m_2}\left(\frac{1}{R_T + h} - \frac{1}{R_T}\right) + \frac{1}{R_T}}$$

Sustituimos los datos del problema y hallamos el radio de la órbita del satélite:

$$r = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{10^6}{10^2}\left(\frac{1}{6{,}37 \cdot 10^6 + 400} - \frac{1}{6{,}37 \cdot 10^6}\right) + \frac{1}{6{,}37 \cdot 10^6}} =$$

$$= 8{,}56 \cdot 10^6 \text{ m}$$

13. El trabajo que hay que realizar para cambiar un satélite de órbita es la diferencia entre las energías mecánicas de las órbitas de destino y de partida:

$$W = \Delta E = E_{mB} - E_{mA} = -G\frac{M_T m}{2r_B} + G\frac{M_T m}{2r_A} =$$

$$= -\frac{GM_T m}{2}\left(\frac{1}{R_T + 2h} - \frac{1}{R_T + h}\right)$$

Sustituimos y calculamos:

$$W = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 300}{2} \cdot$$

$$\cdot\left(\frac{1}{6{,}37 \cdot 10^6 + 2 \cdot 10^7} - \frac{1}{6{,}37 \cdot 10^6 + 10^7}\right) = 1{,}39 \cdot 10^9 \text{ J}$$

— Si tomamos otro origen de energías, el resultado para el trabajo no cambia, puesto que es la diferencia entre las energías potenciales en las dos posiciones, y esa diferencia no varía si se modifica el origen de referencia.

14. La fuerza gravitatoria es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. Esto implica que decae muy rápidamente con la distancia.

En el caso de la Luna, la atracción del Sol o de otros planetas es mucho menor que la atracción de la Tierra, mucho más cercana. Por ello, el movimiento de la Luna no es caótico, pues no se ve apenas influenciado por la presencia de otros cuerpos.